ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session Normal : 2022

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques Et Gestion Comptable**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte** 3 **exercices :

- Exercice 1 : **Les suites numériques** ..... **4.5 points**
- Exercice 2 : **Problème** ..... **11 points**
- Exercice 3 : **Probabilité** ..... **4.5 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (4.5 points)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 -** Calculer u_1 et u_2.

1 pt **2 -** Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > 2$.

0,5 pt **3 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{4}{5}(2 - u_n)$.

0,25 pt **b)** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

0,25 pt **4 -** Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

5 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n - 2$.

0,25 pt **a)** Calculer v_0.

0,5 pt **b)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

0,5 pt **c)** Donner v_n en fonction de n.

0,5 pt **6 - a)** Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$.

0,25 pt **b)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 : (11 points)

Partie 1

On considère la fonction numérique h de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = x^2 - \ln(x)$$

0,5 pt **1 -** Montrer que $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

0,5 pt **2 -** Étudier le signe de $h'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

1 pt **3 -** Vérifier que $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1+\ln(2)}{2}$, et dresser le tableau de variation de h (Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé).

0,5 pt **4 -** En déduire que : $h(x) > 0$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Partie 2

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x} + x$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

0,5 pt **1 - a)** Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$.

0,25 pt **b)** Donner une interprétation géométrique du résultat.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

0,5 pt **b)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0$.

0,25 pt **c)** Déduire de ce qui précède une interprétation géométrique du résultat.

1pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0;+\infty[$.

Yassine Elamri

1 pt **b)** Déduire de la question 4. de la partie 1 que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

4 - Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$.

0.5 pt **a)** Calculer $f\left(\frac{1}{e}\right)$.

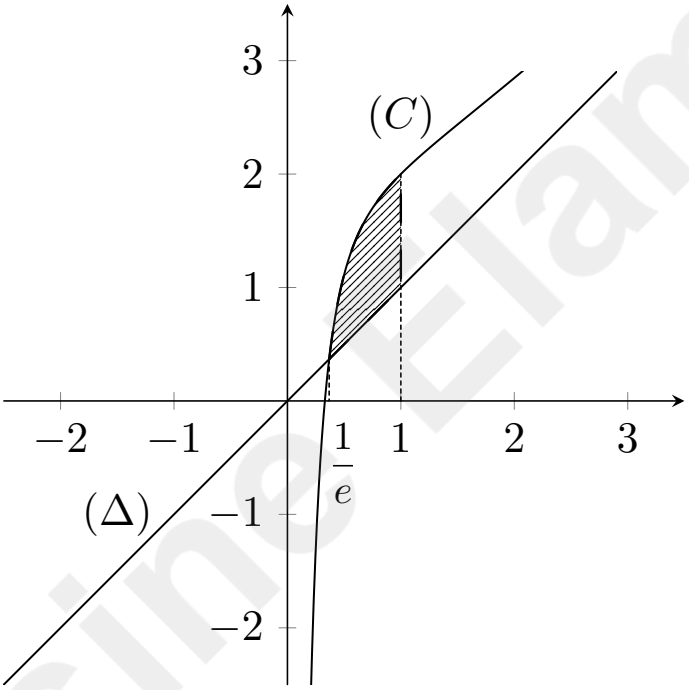
1 pt **b)** Étudier le signe de $f(x) - x$.

0,5 pt **c)** En déduire la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur chacun des intervalles $\left]0;\frac{1}{e}\right]$ et $\left[\frac{1}{e};+\infty\right[$.

5 - Dans la figure ci dessous (C) est la courbe représentative de f et (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1,5 pt **a)** Calculer $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x}dx$ et calculer $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln(x)}{x}\,dx$.

1 pt **b)** En déduire l'aire de la partie hachurée.



Exercice 3 : (4.5 points) (On donnera les résultats sous forme de fraction)

Un sac contient cinq boules blanches numérotées $1-2-3-3-3$ et quatre boules noires numérotées $1-2-3-3$ (Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On tire simultanément au hasard deux boules du sac.

On considère les événements suivants :

A : « Les deux boules tirées sont de même couleur »

B : « L'une exactement des deux boules tirées porte le numéro 3 »

1 pt **1 - a)** Montrer que $p(A) = \frac{4}{9}$.

0.5 pt **b)** Calculer $p(B)$.

1 pt **c)** Calculer $p(A \cap B)$.

0.5 pt **d)** Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

Yassine Elamri

2 - Soit X la variable aléatoire qui correspond au nombre de boules blanches tirées et qui portent le numéros 3.

1 pt **a)** Copier et remplir le tableau ci- dessous en justifiant les réponses.

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{15}{36}$		

0.5 pt **b)** Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Yassine Elamri

FIN