Baccalauréat Sciences Expérimentales

Session : Normal juin 2024

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Expérimentales**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **3 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 5 exercices :

— Exercice 1 : **Suite numérique** ..... **3 points**
— Exercice 2 : **Géométrie de l'espace** ..... **3 points**
— Exercice 3 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
— Exercice 4 : **Calculs des probabilités** ..... **2 points**
— Problème : **Etude de fonctions numériques** ..... **8 points**

♠ On désigne par $\overline{z}$ le conjugué du nombre complexe z
♠ **ln** désigne la fonction logarithme népérien.

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.25 **1 - a)** Vérifier que $u_{n+1} = 4 - \dfrac{6}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 **b)** Montrer par récurrence que $2 \leq u_n \leq 4$, pour tout entier naturel n

0.25 **2 - a)** Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{1 + u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 **b)** Montrer que la suite (u_n) est décroissante et en déduire que (u_n) est convergente.

3 - Soit (v_n) la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{2 - u_n}{1 - u_n}$, pour tout entier naturel n

0.5 **a)** Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$

0.5 **b)** Montrer que $u_n = 1 + \dfrac{1}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$, pour tout entier naturel n

0.5 **c)** Calculer la limite de la suite (u_n).

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(-1, 0, -1)$ et $B(1, 2, -1)$, le plan (P) passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon 5

0.25 **1 -** Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation cartésienne du plan (P)

0.25 **2 -** Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)

0.5 **3 - a)** Vérifier que la distance du point Ω au plan (P) est $d(\Omega, (P)) = 3$

0.5 **b)** En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (T) de rayon à déterminer.

4 - a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire
0.5 au plan (P)

0.5 **b)** Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle (Γ)

0.5 **c)** Montrer que la droite (Δ) est une médiatrice du segment $[AB]$

Yassine Elamri

r than yesterday, tomorrow better than today

Exercice 3 : (4 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B daffixes respectives $a = \sqrt{3}(1-i)$ et $b = 2 + \sqrt{3} + i$

0.5 **1 -** Vérifier que $|a| = \sqrt{6}$ et que $\arg(a) = \dfrac{-\pi}{4}[2\pi]$

0.75 **2 - a)** Montrer que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} + \left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)i$; puis vérifier que $\dfrac{b}{a} = \dfrac{3+\sqrt{3}}{3}e^{i\frac{\pi}{3}}$

0.75 **b)** En déduire une forme trigonométrique du complexe b puis vérifier que b^{24} est un nombre réel.

3 - Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$, qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'.

On pose $R(B) = B', R(A) = A'$ et $R(A') = A''$

0.5 **a)** Vérifier que $z' = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)z$ et que $\arg(a') \equiv \dfrac{-\pi}{12}[2\pi]$ où a' est l'affixe du point A'

b) Montrer que l'affixe du point A'' est $a'' = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et en déduire que les points O, A'' et B sont

0.5 alignés.

0.5 **c)** Montrer que b', l'affixe du point B', vérifie $b' = \left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}\right)\bar{a}$

0.5 **d)** En déduire que le triangle OAB' est rectangle en O

Exercice 4 : (2pts)

Une urne contient sept boules : quatre boules portant le numéro **1**, deux boules portant le numéro **2** et une boule portant le numéro **3**. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

On tire simultanément au hasard deux boules de cette urne.

0.5 **1 -** Montrer que $p(A) = \dfrac{1}{3}$, où A est l'évènement "les deux boules tirées portent le méme numéro"

0.5 **2 -** Montrer que $p(B) = \dfrac{5}{21}$, où B est l'évènement "La somme des numéros des boules tirées est 4"

0.5 **3 -** Calculer $p(A \cap B)$

0.5 **4 -** Les événements A et B sont -ils indépendants ? Justifier.

Yassine Elamri

Today better tha https://steinmath.com row better than today

Problème : (8 pts)

Partie I : On considère les deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x$ et $v(x) = x$

0.5 **1 -** Tracer dans un même repère orthonormé les courbes $(\mathcal{C}_u)$ et $(\mathcal{C}_v)$ des fonctions u et v

0.25 **2 -** Justifier graphiquement que $e^x - x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$

3 - Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_u)$, la courbe $(\mathcal{C}_v)$ et les droites
0.5 d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = x + 1 - \ln(e^x - x)$.

0.25 **1 - a)** Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$

0.5 **b)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \ln\left(1 - xe^{-x}\right)$

0.5 **c)** En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$, puis interpréter géométriquement ce résultat.

0.25 **2 - a)** Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

0.5 **b)** Vérifier que pour tout $x < 0$, $f(x) = x + 1 - \ln(-x) - \ln\left(1 - \dfrac{1}{xe^{-x}}\right)$

c) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis déduire que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction
0.75 la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $-\infty$

0.5 **3 - a)** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{1 - x}{e^x - x}$

0.5 **b)** Etudier le signe de la fonction dérivée de f, puis déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

0.75 **c)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]-1, 0[$

4 - La courbe (C_f) ci dessous est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

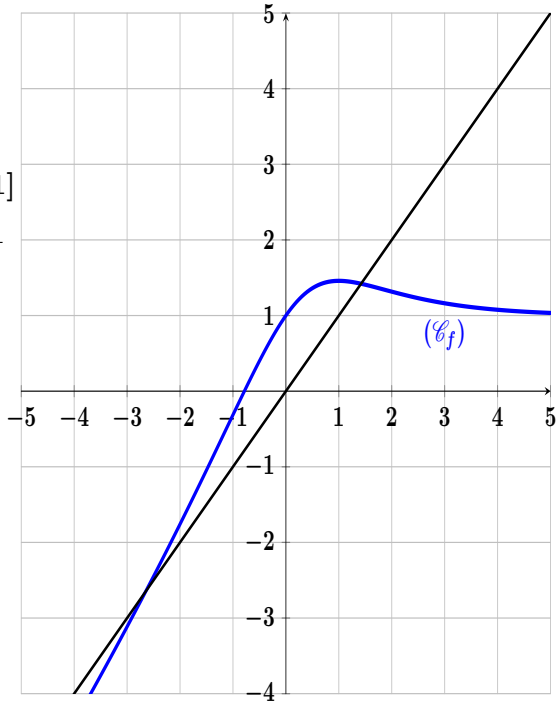
0.5 **a)** Justifier graphiquement que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions α et β.

0.5 **b)** Montrer que : $e^\alpha - e^\beta = \alpha - \beta$

5 - Soit g la restriction de la fonction f sur $I =]-\infty, 1]$

0.5 **a)** Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
(Il n'est pas demandé de déterminer $g^{-1}(x)$)

0.75 **b)** Vérifier que g^{-1} est dérivable en 1.
Et calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$



FIN

Yassine Elamri

r than yesterday, tomorrow better than today