ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2022

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2,5 pts)

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt

1 - a) Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$.

Pour $n = 0$ on a : $u_0 = 2 > 1$ donc $u_0 > 1$ (vraie).

Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n > 1$ et montrons que : $u_{n+1} > 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$; On a :

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}u_n > 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2} \\ &\iff u_{n+1} > \frac{2}{2} = 1 \end{aligned}$$

Donc d'aprés le raisonnement par récurrence on a : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n > 1}$.

0,75 pt

b) Montrons que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)$ et déduire que la suite (u_n) est décroissante et convergente.

Soit n un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - u_n \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}u_n = \frac{\sqrt{2}}{2}u_n - \frac{2}{2}u_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{2}\right)u_n - \frac{\sqrt{2}-2}{2} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{2}-2}{2}(u_n - 1)}$

T than yesterday, tomorrow better than today

- **Déduisons que la suite (u_n) est décroissante et convergente :**

On a : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n > 1$

donc : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n - 1 > 0$

De plus, $\sqrt{2} - 2 < 0$ d'où $u_{n+1} - u_n < 0$

Il s'ensuit que la suite (u_n)est décroissante.

Et comme (u_n) est minorée par 1 alors elle est convergente.

2 - On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$.

0,5 pt **a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique et déterminons sa raison et son premier terme.**

Soit n de $\mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}u_n + \frac{2-\sqrt{2}-2}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}u_n - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(u_n - 1) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}v_n \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et du premier terme :

$v_0 = u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$

0,5 pt **b) Ecrivons u_n en fonction de n puis déduisons la limite de la suite (u_n).**

On sait que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et du premier terme : $v_0 = 1$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $v_n = v_0 \times q^{n-0}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$; $v_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$ et comme pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$ alors pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = v_n + 1$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}$; $u_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n + 1$

- **En déduire la limite de la suite (u_n) .**

Puisque : $-1 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 0$ donc : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

0,25 pt **c) Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{2021}$.**

On a : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots\cdots + u_{2021}$

$\Longrightarrow S = v_0 + 1 + v_1 + 1 + v_2 + 1 + \cdots\cdots + v_{2021} + 1$

$\Longrightarrow S = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_{2021} + 1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1$

Yassine Elamri

$$\Longrightarrow S = v_0 \times \frac{1-q^{(2021-0+1)}}{1-q} + (2021-0+1)\times 1$$

$$\Longrightarrow S = 1 \times \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} + 2022$$

$$\Longrightarrow S = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2022}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + 2022$$

$$\Longrightarrow S = \frac{\frac{2^{2022}-\sqrt{2}^{2022}}{2^{2022}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + 2022$$

$$\Longrightarrow S = \frac{\frac{2^{2022}-2^{1011}}{2^{2022}}}{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + 2022$$

$$\Longrightarrow S = \frac{2^{2022}-2^{1011}}{2^{2022}} \times \frac{2}{2-\sqrt{2}} + 2022$$

$$\Longrightarrow S = \frac{2^{2022}-2^{1011}}{2-\sqrt{2}} \times \frac{1}{2^{2021}} + 2022$$

Exercice 2 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé directe $(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les deux points $A(1,-1,1)$ et $B(5,1,-3)$. Soit (S) la sphère de center $\Omega(3,0,-1)$ et de rayon $R=3$, et (Δ) la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}(2,-2,1)$.

0,25 pt **1 - a) Calculons la distance ΩA :**

$$\Omega A = \|\overrightarrow{\Omega A}\|$$
$$= \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2 + (z_A - z_\Omega)^2}$$
$$= \sqrt{(1-3)^2 + (-1-0)^2 + (1-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2}$$
$$= \sqrt{4+1+4}$$
$$= \sqrt{9}$$

Donc $\boxed{\Omega A = 3}$

0,5 pt **b) Montrons que les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires.**

On a : $\vec{u}(2,-2,1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ), donc :

$\overrightarrow{\Omega A} \cdot \vec{u} = 2\times(-2) + (-2)\times(-1) + 1\times 2 = -4+4 = 0$

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux. Par suite : $\boxed{(\Delta) \perp (\Omega A)}$

0,25 pt **c) Déduisons la position relative de la droite (Δ) et la sphère (S).**

Yassine Elamri

On a $\Omega A = 3 = R$ donc $A \in (S)$

D'autre part, $A \in (\Delta)$ et les droites (Δ) et (ΩA) sont perpendiculaires

Donc (Δ) est tangente à la sphère (S) en A.

0,5 pt **2 - Soit $M_a(2a-3, 3-2a, a-1)$ avec $a \in \mathbb{R}$, montrons que $\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}$ et déduisons que $M_a \in (\Delta)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$**

On a : $\overrightarrow{AM_a} = \left(x_{M_a} - x_A\right)\vec{i} + \left(y_{M_a} - y_A\right)\vec{j} + \left(z_{M_a} - z_A\right)\vec{k}$

$= (2a-3-1)\vec{i} + (3-2a+1)\vec{j} + (a-1-1)\vec{k}$

$= (2a-4)\vec{i} + (4-2a)\vec{j} + (a-2)\vec{k}$

$= 2(a-2)\vec{i} - 2(a-2)\vec{j} + (a-2)\vec{k}$

$= (a-2)(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})$

Donc : $\boxed{\overrightarrow{AM_a} = (a-2)\vec{u}}$

Par suite, les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM_a}$ sont colinéaires, et comme $A \in (\Delta)$ alors $M_a \in (\Delta)$.

0,5 pt **3 - a) Vérifions que $2x - 2y + z - 9a + 13 = 0$ est une équation du plan (P_a) passant par le point M_a et perpendiculaire à la droite (Δ)**

Le plan (P_a) est perpendiculaire à la droite (Δ), de vecteur directeur $\vec{u}(2, -2, 1)$.

Donc $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (P_a), par suite l'équation cartésienne du plan (P_a) s'écrit :

(P_a) : $2x - 2y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$

Comme $M_a \in (\Delta)$ alors $2x_{M_a} - 2y_{M_a} + z_{M_a} + d = 0$

$\Longrightarrow 2(2a-3) - 2(3-2a) + a - 1 + d = 0$

$\Longrightarrow 4a - 6 - 6 + 4a + a - 1 + d = 0$

$\Longrightarrow 9a - 13 + d = 0$

$\Longrightarrow 9a - 13 + d = 13 - 9a$

D'où $\boxed{(P_a) : 2x - 2y + z + 13 - 9a = 0}$

0,5 pt **b) Montrons que : $d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|$**

On a : $d(\Omega, (P_a)) = \dfrac{|2x_\Omega - 2y_\Omega + z_\Omega + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$

$= \dfrac{|2 \times 3 - 2 \times 0 + 1 \times (-1) + 13 - 9a|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}}$

$= \dfrac{|6 - 0 + (-1) + 13 - 9a|}{\sqrt{4+4+1}}$

$= \dfrac{|18 - 9a|}{\sqrt{9}}$

$= 3\dfrac{|6 - 3a|}{3} = |6 - 3a|$

Donc $\boxed{d(\Omega, (P_a)) = |3a - 6|}$

0,5 pt **c) Déterminons les deux valeurs de a pour lesquelles le plan (P_a) est tangent à**

Yassine Elamri

la sphère (S).

Comme le plan (P_a) est tangent à la sphère (S) alors $d(\Omega,(P_a)) = R$

Donc $|3a-6| = 3$

c-à-d : $3a-6=3$ ou $3a-6=-3$

c-à-d : $3a=3+6$ ou $3a=6-3$

~~c-à-d : $3a=9$ ou $3a=3$~~

c-à-d : $\boxed{a=3 \text{ ou } a=1}$

Exercice 3 : (3 pts)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 1+5i$, $z_B = 1-5i$ et $z_C = 5-3i$.

0,25 pt **1 - Déterminons le nombre complexe z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$**

On a : D est le milieu du segment $[AC]$ donc $z_D = \dfrac{z_A+z_C}{2}$

$$\Longrightarrow z_D = \frac{1+5i+5-3i}{2} = \frac{6+2i}{2}$$

$$\Longrightarrow \boxed{z_D = 3+i}$$

0,5 pt **2 - Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$. Déterminons le nombre complexe z_E affixe du point E l'image du point B par h.**

On a : $h(B)=E \iff \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\iff z_E - z_A = \tfrac{1}{2}(z_B - z_A)$$
$$\iff z_E = z_A + \tfrac{1}{2}(z_B - z_A)$$
$$\iff z_E = 1+5i+\frac{1}{2}(1-5i-(1+5i))$$
$$\iff z_E = 1+5i+\frac{1}{2}(1-5i-1-5i)$$
$$\iff z_E = 1+5i+\frac{1}{2}(-10i)$$
$$\iff z_E = 1+5i-5i$$
$$\iff \boxed{z_E = 1}$$

0,5 pt **3 - On considère la rotation R de center C d'angle $\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)$, déterminons l'image de B par R.**

Soit M l'image de B par R, donc $R(B)=M \iff z_M - z_C = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_C)$

$$\iff z_M = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z_B - z_C) + z_C$$

Comme $e^{-i\frac{\pi}{2}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -i$

alors $z_M = -i(1-5i-5+3i)+5-3i$

$$\iff z_M = -i(-4-2i)+5-3i$$
$$\iff z_M = 4i-2+5-3i$$

Today https://steinmath.com rday, tomorrow better than today

Yassine Elamri

$\Longleftrightarrow$ $\boxed{z_M = 3 + \mathrm{i} = z_D}$

Donc l'image de B par R est D

4 - Soit F le point d'affixe $z_F = -1 + \mathrm{i}$

0,25 pt **a) Vérifions que : $\dfrac{z_D - z_A}{z_F - z_A} \times \dfrac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = -1$**

$$\text{On a : } \frac{z_D - z_A}{z_F - z_A} \times \frac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = \frac{3 + \mathrm{i} - (1 + 5\mathrm{i})}{-1 + \mathrm{i} - (1 + 5\mathrm{i})} \times \frac{-1 + \mathrm{i} - 1}{3 + \mathrm{i} - 1}$$
$$= \frac{3 + \mathrm{i} - 1 - 5\mathrm{i}}{-1 + \mathrm{i} - 1 - 5\mathrm{i}} \times \frac{-2 + \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$$
$$= \frac{2 - 4\mathrm{i}}{-2 - 4\mathrm{i}} \times \frac{-2 + \mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}}$$
$$= -\frac{2(1 - 2\mathrm{i})}{2(1 + 2\mathrm{i})} \times \frac{\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i})}{\mathrm{i}(1 - 2\mathrm{i})}$$
$$= -\frac{1 - 2\mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}} \times \frac{1 + 2\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}}$$

Donc $\boxed{\dfrac{z_D - z_A}{z_F - z_A} \times \dfrac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = -1}$

0,5 pt **b) En déduisons que $\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right) \equiv \pi[2\pi]$.**

$$\text{On a : } \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right) \equiv arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_F - z_A}\right) + arg\left(\frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}\right)[2\pi]$$
$$\equiv arg\left(\frac{z_D - z_A}{z_F - z_A} \times \frac{z_F - z_E}{z_D - z_E}\right)[2\pi]$$
$$\equiv arg(-1)[2\pi]$$
$$\equiv \pi[2\pi]$$

Donc $\boxed{\left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}\right) \equiv \pi[2\pi]}$.

0,5 pt **c) Déterminons la forme trigonométrique du nombre $\dfrac{z_E - z_F}{z_A - z_F}$**

$$\text{On a : } \frac{z_E - z_F}{z_A - z_F} = \frac{1 - (-1 + \mathrm{i})}{1 + 5\mathrm{i} - (-1 + \mathrm{i})}$$
$$= \frac{1 + 1 - \mathrm{i}}{1 + 5\mathrm{i} + 1 - \mathrm{i}}$$
$$= \frac{2 - \mathrm{i}}{2 + 4\mathrm{i}}$$
$$= \frac{-\mathrm{i}(1 + 2\mathrm{i})}{2(1 + 2\mathrm{i})}$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{i}$$
$$= \frac{1}{2}(0 - \mathrm{i})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Donc $\boxed{\dfrac{z_E - z_F}{z_A - z_F} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\tfrac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right)}$

- **Déduisons la nature du triangle AEF.**

$$\text{On a : } \left(\overrightarrow{(FA}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv arg\left(\frac{z_E - z_F}{z_A - z_F}\right)[2\pi]$$

Yassine Elamri

Et d'après ce qui précède on a : $\dfrac{z_E - z_F}{z_A - z_F} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Donc $arg\left(\dfrac{z_E - z_F}{z_A - z_F}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où $\left(\overrightarrow{(FA}, \overrightarrow{FE}\right) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Ce qui nous permet de déduire que le triangle AEF est rectangle en F.

0,5 pt

d) Déduisons que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

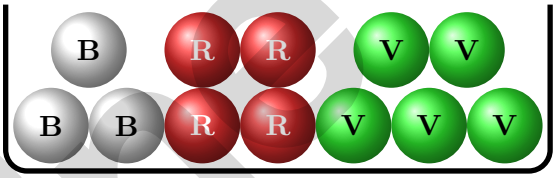
On a : $\dfrac{z_D - z_A}{z_F - z_A} \times \dfrac{z_F - z_E}{z_D - z_E} = -1$ et $\dfrac{z_E - z_F}{z_A - z_F} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i} \Longrightarrow \dfrac{z_E - z_F}{z_A - z_F} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$

Donc les points A, E et F ne sont pas alignés. Il s'ensuit que les points A, D, E et F sont cocycliques. Et comme le triangle AEF est rectangle en F, alors les points A, D, E et F appartiennent au cercle (Γ) de diamètre$[AE]$.

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient trois boules blanches, quatre boules rouges et cinq boules vertes indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne.



Tirage simultané de trois boules

Puisque les tirage est **simultanément** de **trois boules** parmi **douze boules**, alors chaque possibilité est **une combinaison de trois éléments parmi douze éléments**. Le nombre de cas possible est **le nombre de combinaison de 3 parmi 12**, donc :

$Card(\Omega) = C_{12}^3 = \dfrac{A_{12}^3}{3!} = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times 11 \times 10 = 220$

Puisque les douze boules sont **indiscernables au toucher**, alors la condition **d'équiprobabilité** est vérifiée le long de l'exercice. Donc : $p(evenement) = \dfrac{Card(evenement)}{Card(\Omega)}$

1 - On considère les événements suivants :

A : **« Obtenir exactement deux boules rouges »**

B : **« Obtenir exactement une boule verte »**

0,75 pt

a) Montrons que : $P(A) = \dfrac{12}{55}$ et $P(B) = \dfrac{21}{44}$

- A : **« Obtenir exactement deux boules rouges » :** $\{RR\overline{R}\}$

$P(A) = \dfrac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_4^2 \times C_8^1}{220} = \dfrac{6 \times 8}{220} = \dfrac{48}{220} = \dfrac{12}{55}$ Donc $P(A) = \dfrac{12}{55}$

Today better than yesterday https://steinmath.com Better than today

Yassine Elamri

- B : « **Obtenir exactement une boule verte** » : $\{\overline{VVV}\}$

$P(B) = \dfrac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \dfrac{C_5^1 \times C_7^2}{220} = \dfrac{5 \times 21}{220} = \dfrac{105}{220} = \dfrac{21}{44}$ Donc $\boxed{P(B) = \dfrac{21}{44}}$

0,75 pt **b) Calculons $P(A/B)$: la probabilité de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.**

On a : $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

L'évènement : $A \cap B$ « Obtenir deux boules rouges et une boule verte » : $\{RRV\}$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\dfrac{Card\,(A \cap B)}{Card(\Omega)}}{P(B)} = \frac{\dfrac{C_4^2 \times C_5^1}{220}}{\dfrac{21}{44}} = \frac{\dfrac{6 \times 5}{220}}{\dfrac{21}{44}} = \frac{\dfrac{30}{220}}{\dfrac{21}{44}} = \frac{\dfrac{3}{22}}{\dfrac{21}{44}} = \frac{2}{7}$$

Donc $\boxed{P(A/B) = \dfrac{2}{7}}$

Puisque $P(A/B) \neq P(A)$ alors Les événements A et B ne sont pas indépendants.

2 - Soit la variable aléatoire X qui associe à chaque tirage le nombre de boules vertes tirées.

1 pt **a) Déterminons la loi de la de probabilité X.**

Les valeurs prises par X sont : 0 ;1 ;2 ;3

- $X = 0 \longrightarrow \{\overline{VVV}\}$
- $X = 1 \longrightarrow \{V\overline{VV}\}$
- $X = 2 \longrightarrow \{VV\overline{V}\}$
- $X = 3 \longrightarrow \{VVV\}$

On a : $P(X = 0) = \dfrac{C_7^3}{card(\Omega)} = \dfrac{35}{220} = \dfrac{7}{44}$

$P(X = 1) = P(B) = \dfrac{21}{44}$

$P(X = 2) = \dfrac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} = \dfrac{70}{220} = \dfrac{7}{22}$

$P(X = 3) = \dfrac{C_5^3}{card(\Omega)} = \dfrac{10}{220} = \dfrac{1}{22}$

Donc on peut résumer la loi de probabilité de X dans le tableau suivant

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{7}{44}$	$\frac{21}{44}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{1}{22}$

0,5 pt **b) Calculons la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes.**

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \dfrac{7}{22} + \dfrac{1}{22} = \dfrac{8}{22} = \dfrac{4}{11}$

Donc la probabilité d'obtenir au moins deux boules vertes est : $\boxed{P(X \geq 2) = \dfrac{4}{11}}$

Exercice 5 : (8 pts)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^4 \left(\ln x - 1\right)^2 \ ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, (unité : $1cm$)

Yassine Elamri

0.75 pt **1 - Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On sait que : $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x-1)^2=+\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^4=+\infty$

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$

- **Déterminons la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$**

on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4(\ln x-1)^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3(\ln x-1)^2=+\infty$ (car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x-1)^2=+\infty$)

Donc : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}=+\infty}$

(C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.5 pt **2 - a) Montrons que f est continue à droite au point 0.**

- **Calculons :** $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^4(\ln x-1)^2=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x^2(\ln x-1)\right)^2=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \left(x^2\ln x-x^2\right)^2=0$

(car : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2\ln x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^2=0$)

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=0=f(0)$ alors f est continue à droite au point 0.

0.5 pt **b) Étudions la dérivabilité de la fonction f à droite en 0.**

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{x^4(\ln x-1)^2}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^3(\ln x-1)^2$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\times(x(\ln x-1))^2=0$ (Car : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln x=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x=0$

Alors f est dérivable à droite en 0 et on a $\boxed{f'_d(0)=0.}$

- **Interprétation géométrique :**

On a $f'_d(0)=0$ alors (C) admet une demi tangente horizontale à droite de 0.

0.75 pt **3 - a) Montrons que : $f'(x)=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$**

On sait que la fonction $x\mapsto x^4$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme) et $x\mapsto(\ln x-1)^2$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ (car $x\mapsto\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$). Donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme étant le produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

Alors $\forall x\in]0;+\infty[$; on a :

$$f'(x)=\left(x^4(\ln x-1)^2\right)'=(x^4)'(\ln x-1)^2+x^4\left((\ln x-1)^2\right)'$$

$$\Longrightarrow f'(x)=4x^3(\ln x-1)^2+x^4\times2(\ln x-1)'(\ln x-1)$$

$$=4x^3(\ln x-1)^2+2x^4\times\frac{1}{x}(\ln x-1)$$

$$=4x^3(\ln x-1)^2+2x^3(\ln x-1)$$

$$=2x^3(\ln x-1)(2(\ln x-1)+1)$$

$$=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-2+1)$$

$$=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)$$

Donc $\boxed{\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f'(x)=2x^3(\ln x-1)(2\ln x-1)}$

0.5 pt **b) Dressons le tableau de variations de f.**

Yassine Elamri

- **Étudions le signe de $f'(x)$:**

$\forall x \in]0;+\infty[$; on a : $2x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$

$\forall x \in]0;+\infty[$; on a : $(\ln x - 1)(2\ln x - 1) = 0 \iff \ln x - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad 2\ln x - 1 = 0$

$\iff \ln x = 1 \quad \text{ou} \quad \ln x = \dfrac{1}{2}$

$\iff x = \mathrm{e} \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$

$\iff x = \mathrm{e} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{\mathrm{e}}$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, alors :

- Si $x > \mathrm{e} \iff \ln x > \ln(\mathrm{e})$
$\iff \ln x > 1 \iff \ln x - 1 > 0$
- Si $x < \mathrm{e} \iff \ln x < \ln(\mathrm{e})$
$\iff \ln x < 1 \iff \ln x - 1 < 0$
- Si $x > \sqrt{\mathrm{e}} \iff \ln x > \ln(\sqrt{\mathrm{e}})$
$\iff \ln x > \dfrac{1}{2} \iff \ln x - 1 > 0$
- Si $x < \sqrt{\mathrm{e}} \iff \ln x < \ln(\sqrt{\mathrm{e}})$
$\iff \ln x < \dfrac{1}{2} \iff \ln x - 1 < 0$

$\star$ $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \left(\sqrt{\mathrm{e}^2}\right)^2 \left(\ln(\sqrt{\mathrm{e}}) - 1\right)^2$

$\Longrightarrow f(\sqrt{\mathrm{e}}) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$

$\star$ $f(\mathrm{e}) = (\mathrm{e}^2)^2 (\ln(\mathrm{e}) - 1)^2 = 0$

Tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$:

x	0		$\sqrt{\mathrm{e}}$		e		$+\infty$
$2x^3$	0	$+$		$+$		$+$	
$\ln x - 1$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$2\ln x - 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{\mathrm{e}^2}{4}$	↘	0	↗	$+\infty$

0.5 pt **4 - a) Étudions le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$.**

$\forall x \in]0;+\infty[$; on a : $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$.

Comme $\forall x \in]0;+\infty[$; $2x^2 > 0$ donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $(6\ln x - 5)\,lnx$

$\forall x \in]0;+\infty[$; on a : $(6\ln x - 5)\,lnx = 0 \iff \ln x = 0 \quad \text{ou} \quad 6\ln x - 5 = 0$

$\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad \ln x = \dfrac{5}{6}$

$\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad x = \mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$, alors :

- Si $x > 1 \iff \ln x > \ln 1 \iff \ln x > 0$
- Si $x < 1 \iff \ln x < \ln 1 \iff \ln x < 0$
- Si $x > \mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \iff \ln x > \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)$
$\iff \ln x > \dfrac{5}{6} \iff 6\ln x - 5 > 0$
- Si $x < \mathrm{e}^{\frac{5}{6}} \iff \ln x < \ln\left(\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}\right)$
$\iff \ln x < \dfrac{5}{6} \iff 6\ln x - 5 < 0$

Tableau de signe de f'' sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$\mathrm{e}^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$2x^2$	0	$+$		$+$		$+$	
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$6\ln x - 5$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

0.5 pt **b) En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion.**

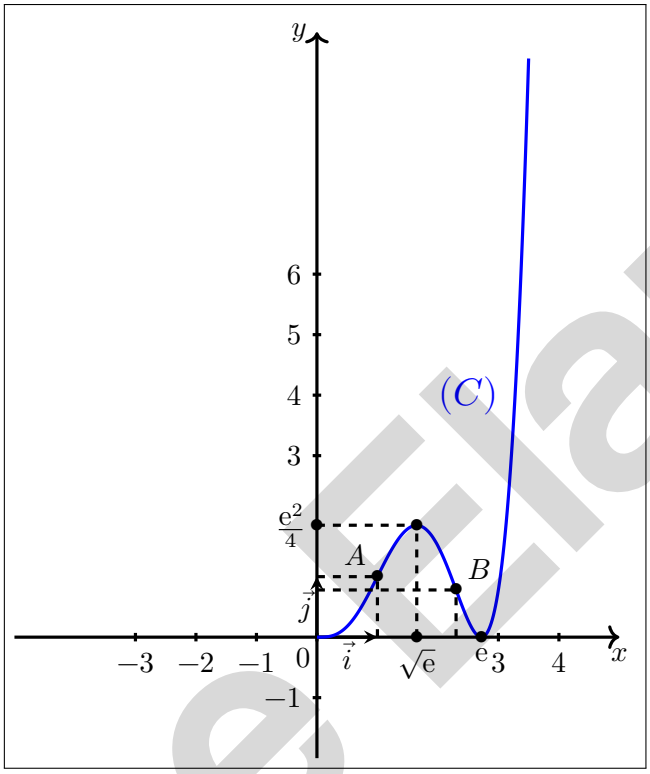
Yassine Elamri

D'après le tableau de signe de $f''(x)$ on a f'' s'annule en 1 et $e^{\frac{5}{6}}$ et aussi change le signe, donc (C) admet deux points d'inflexion $A(1;1)$ et $B\left(e^{\frac{5}{6}};\frac{e^{\frac{5}{6}}}{36}\right)$.

Tableau de convexité de f'' sur $]0;+\infty[$:

x	0		1		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
(C)	‖	*convexe*	A	*concave*	B	*convexe*	

1 pt **5 - a) Construisons la courbe (C) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$**



0.5 pt **b) En utilisant la courbe (C), déterminons le nombre de solutions de l'équation** $(E) : x^2(\ln x - 1) = -1$

L'équation (E) est définie si $x > 0$ et $\ln x - 1 < 0$ c'est à dire $x \in]0;e[$

$\forall x \in]0;e[$; on a : $x^2(\ln x - 1) = -1 \implies x^4(\ln x - 1)^2 = 1 \implies f(x) = 1$

Alors $\forall x \in]0;e[$; d'après la courbe (C) on a la droite d'équation $y = 1$ coupe la courbe (C) en deux points.

Donc le nombre de solutions de l'équation $(E) : x^2(\ln x - 1) = -1$ est 2.

6 - On considère la fonction g définie sur par $g(x) = f(|x|)$

0.5 pt **a) Montrons que la fonction g est paire.**

- $\forall x \in \mathbb{R}$; on a $-x \in \mathbb{R}$ car les éléments de $\mathbb{R}$ sont symétriques par rapport à 0 **(1)**
- $\forall x \in \mathbb{R}$; $g(-x) = f(|-x|) = f(|-x|) = g(x)$ **(2)**

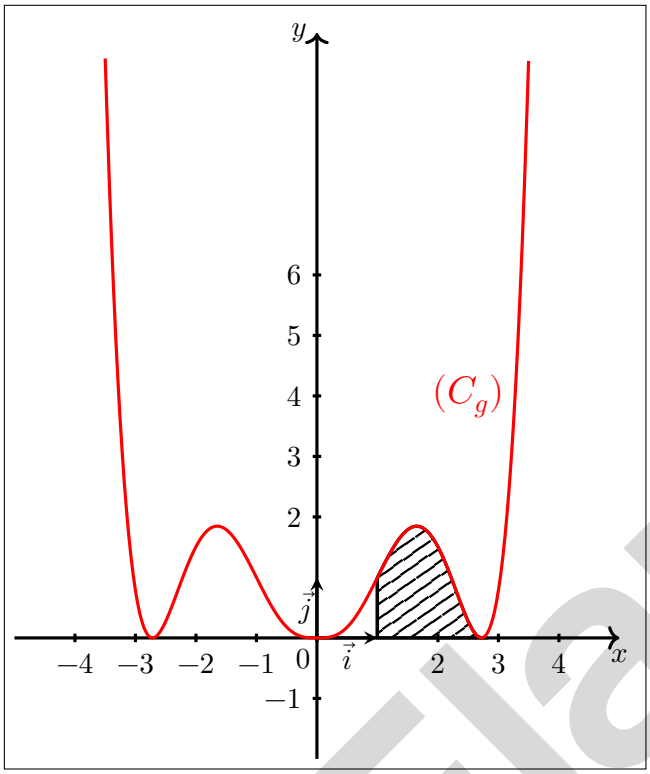
D'après **(1)** et **(2)** on a g est une fonction paire.

0.5 pt **b) Construisons (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$**

Sur l'intervalle $]0;+\infty[$ on a : $|x| = x$ donc $g(x) = f(x)$ alors (C_g) et (C) sont confondus.

Sur l'intervalle $]-\infty;0[$, on a (C_g) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car la fonction g est une fonction paire.

Yassine Ziamri



0.5 pt

7 - a) **On pose** $I = \int_1^{\mathrm{e}} x^4(\ln x - 1)\mathrm{d}x$ **Montrons que :** $I = \dfrac{6-\mathrm{e}^5}{25}$ **(Intégration par parties)**

Soient $U'(x) = x^4$ et $V(x) = \ln x - 1$

Donc $U(x) = \dfrac{x^5}{5}$ et $V'(x) = \dfrac{1}{x}$

Donc
$$\begin{aligned}
I &= \int_1^{\mathrm{e}} x^4(\ln x - 1)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{x} \times \frac{x^5}{5}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^4}{5}\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1)\right]_1^{\mathrm{e}} - \left[\frac{x^5}{25}\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \left[\frac{x^5}{5}(\ln x - 1) - \frac{x^5}{25}\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \left[\frac{x^5}{5}\left(\ln x - 1 - \frac{1}{5}\right)\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \left[\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{6}{5}\right)\right]_1^{\mathrm{e}} \\
&= \frac{\mathrm{e}^5}{5}\left(\ln(\mathrm{e}) - \frac{6}{5}\right) - \left(\frac{1}{5}\left(\ln 1 - \frac{6}{5}\right)\right) \\
&= \frac{\mathrm{e}^5}{5}\left(1 - \frac{6}{5}\right) + \frac{6}{25} \\
&= \frac{\mathrm{e}^5}{5} \times \left(-\frac{1}{5}\right) + \frac{6}{25} \\
&= -\frac{\mathrm{e}^5}{25} + \frac{6}{25}
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{I = \dfrac{6-\mathrm{e}^5}{25}}$

Yassine Elamri

0.5 pt

b) On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $h(x)=x^5\left(\ln x-1\right)^2$.

Vérifions que $h'(x)=5f(x)+2x^4\left(\ln x-1\right)$.

$\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ h(x)=x\times x^4\left(\ln x-1\right)^2=xf(x)$

h est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme le produit de deux fonctions dérivables.

$\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ h'(x)=\left(xf(x)\right)'$

$$\begin{aligned}
&=(x)'f(x)+xf'(x)\\
&=f(x)+x\left(2x^3\left(\ln x-1\right)\left(2\ln x-1\right)\right)\\
&=x^4\left(\ln x-1\right)^2+2x^4\left(\ln x-1\right)\left(2\ln x-1\right)\\
&=x^4\Big(\ln x-1\Big)\Big(\ln x-1+2\left(2\ln x-1\right)\Big)\\
&=x^4\left(\ln x-1\right)\left(\ln x-1+4\ln x-2\right)\\
&=x^4\left(\ln x-1\right)\left(5\ln x-3\right)\\
&=x^4\left(\ln x-1\right)\left(5\ln x-5+2\right)\\
&=x^4\left(\ln x-1\right)\left(5(\ln x-1)+2\right)\\
&=5x^4\left(\ln x-1\right)^2+2\left(\ln x-1\right)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ h'(x)=5f(x)+2x^4\left(\ln x-1\right)}$

0.5 pt

c) En déduire que : $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I$

$\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ h'(x)=5f(x)+2x^4\left(\ln x-1\right)\implies f(x)=\dfrac{h'(x)}{5}-\dfrac{2}{5}x^4\left(\ln x-1\right)$ alors :

$$\begin{aligned}
\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x&=\int_1^{\mathrm{e}}\Big(\frac{h'(x)}{5}-\frac{2}{5}x^4\left(\ln x-1\right)\Big)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{5}\int_1^{\mathrm{e}}h'(x)\mathrm{d}x-\frac{2}{5}\int_1^{\mathrm{e}}x^4\left(\ln x-1\right)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{5}\Big[h(x)\Big]_1^{\mathrm{e}}-\frac{2}{5}I\\
&=\frac{1}{5}\left(h(\mathrm{e})-h(1)\right)-\frac{2}{5}I\\
&=\frac{1}{5}\left(\mathrm{e}\times f(\mathrm{e})-1\times f(1)\right)-\frac{2}{5}I\\
&=\frac{1}{5}\times(-1)-\frac{2}{5}I
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I}$

0.5 pt

d) Calculons l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$. (voir figure)

On a : $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}|f(x)|\mathrm{d}x\times u.a=\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x\times u.a$ car $\forall x\in[1;\mathrm{e}]\ ;\ f(x)\geqslant 0$

Donc : $\mathcal{A}=\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}}f(x)\mathrm{d}x\times u.a$

$$\begin{aligned}
&=\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}I\right)\times cm^2\\
&=\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\times\left(\frac{6-\mathrm{e}^5}{25}\right)\right)\times cm^2
\end{aligned}$$

Yassine Elamri

$$= -\frac{1}{5}\left(1 + 2\left(\frac{6 - \mathrm{e}^5}{25}\right)\right) \times cm^2$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{25 + 12 - 2\mathrm{e}^5}{25}\right) \times cm^2$$
$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{37 - 2\mathrm{e}^5}{25}\right) \times cm^2$$

Donc l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est : $\mathcal{A} = \dfrac{2\mathrm{e}^5 - 37}{125} \times cm^2$

FIN

Yassine Elamri