ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2020

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2 pts)

1 - Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$:

0.5 pt Pour $n = 0$ on a $u_0 = 1 < 2$, Donc proposition vraie pour $n = 0$.

On suppose que $\exists n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

Montrons que $U_{n+1} < 2$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - 2 &= \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2 \\ &= \frac{3u_n - 8 - 4u_n + 10}{2u_n - 5} \\ &= \frac{2 - u_n}{2u_n - 5} \end{aligned}$$

On a d'après l'hypothèse $u_n < 2 \Longrightarrow 2u_n - 5 < -1 < 0$ et $2 - u_n > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 < 0$, d'où $U_{n+1} < 2$.

D'après le principe de récurrence on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 2$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 : On calcule :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{\frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 3}{\frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{-3u_n - 7}{-u_n + 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{2u_n - 4}{u_n - 2} = 2 \end{aligned}$$

Donc la suite v_n est arithmétique de raison 2.

0.75 pt **b)** l'expression du terme générale de v_n : $v_n = v_0 + 2 \times n = 2 + 2n$

Déduisons l'expression du terme générale de u_n :

on a $\dfrac{u_n - 3}{u_n - 2} = \dfrac{u_n - 2 - 1}{u_n - 2} = 1 - \dfrac{1}{u_n - 2}$

Donc : $\dfrac{1}{u_n - 2} = 1 - v_n \quad \Rightarrow \quad u_n - 2 = \dfrac{1}{1 - v_n}$

$\Rightarrow u_n = 2 + \dfrac{1}{1 - v_n} = 2 + \dfrac{1}{1 - (2 + 2n)} = 2 - \dfrac{1}{1 + 2n} = \dfrac{1 + 4n}{1 + 2n}$

D'où : $u_n = \dfrac{1 + 4n}{1 + 2n}$

0.25 pt **c)** $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 + 4n}{1 + 2n} = \dfrac{4}{2} = 2$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 2$

Exercice 2 : (5 pts)

1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

On calcule $\Delta = b^2 - 4ac = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 = 2 - 4 = -2 \leq 0$

0.75 pt Donc : l'équation admet deux solutions imaginaires conjuguées :

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b + \mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = \overline{z_1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

2 - On pose $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

a) Ecrivons a sous forme trigonométrique :

0.75 pt On a : $|a| = 1$ Donc $a = 1\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Déduisons que a^{2020} est un nombre réel :

On utilise la formule de Moivre :

$$\begin{aligned} a^{2020} &= 1^{2020}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{2020} \\ &= 1\left(\cos\left(\frac{2020\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2020\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \cos(505\pi) + \mathrm{i}\sin(505\pi) \\ &= \cos(505\pi) = -1 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc : a^{2020} est un nombre réel

b) Prouvons que : $b^2 = a$:

on a $b^2 = \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2$

0.5 pt (Formule de Moivre) $\Rightarrow \quad b^2 = \left(\cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{2\pi}{8}\right)\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = a$

Yassine Elamri

Today better than yesterd https://steinmath.com r than today

Donc : $b^2 = a$

3 - a) Vérifions que $z' = e^{i\frac{\pi}{8}}z = bz$:

0.25 pt On a $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\frac{\pi}{8}}$ Avec $\omega = 0$

Donc $z' = e^{i\frac{\pi}{8}}z = bz$

b) - Déterminons l'image de C par la rotation R :

L'image de C par la rotation R est $z' = bc = b$

Donc l'image de C par R est B.

0.5 pt - Montrons que A est l'image de B par R :

On a l'image de B par R est $z' = bb = b^2 = a$ (D'après question 2-b)).

Donc A est l'image de B par R.

4 - a) Montrons que $|a - b| = |b - c|$ et déduisons la natrue du tiangle ABC :

on a :

$$\begin{aligned} |a - b| &= |b(b - 1)| \\ &= |b||(b - 1)| \\ &= |b - 1| \\ &= |b - c| \quad \text{(Puisque c=1)} \end{aligned}$$

Donc : $|a - b| = |b - c|$

0.75 pt Alors, le triangle ABC est un triangle isocèle en B.

b) Déterminons une mesure de l'angle$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$:

On a :

$$\begin{aligned} \arg((\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})) &= \arg(\frac{a - b}{b - c}) \\ &= \arg(\frac{b(b - 1)}{b - 1}) \\ &= \arg(b) = \frac{\pi}{8}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc $\arg(b) = \frac{\pi}{8}[2\pi]$

5 - a) Vérifions que l'affixe de D est $b^2 + 1$:

On a $z' = z + u$ avec u l'affixe du vecteur $\vec{u}$

Donc $z' = z + 1$

Ceci implique que $d = a + 1 = b^2 + 1$

0.25 pt Alors : $d = b^2 + 1$

Yassine Elamri

b) Montrons que $\dfrac{b^2+1}{b} = b+\overline{b}$ et déduisons que les points D et O et B sont alignés :

On a : $\dfrac{b^2+1}{b} = b + \dfrac{1}{b} = b + \dfrac{\overline{b}}{b\overline{b}} = b+\overline{b}$

D'où : $\dfrac{b^2+1}{b} = b+\overline{b}$

Puisque : $\dfrac{b^2+1-0}{b-0} = \dfrac{d-0}{b-0} = b+\overline{b} = 2\Re(b) \in \mathbb{R}$

0.75 pt

Donc les points D et O et B sont alignés.

Exercice 3 : (4 pts)

1 - a) Motrons que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2+2}{e^x}$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) &= (e^x - 2x + 2 - 3e^{-x})' \\ &= e^x - 2 + 3e^{-x} \\ &= \frac{e^{2x} - 2e^x + 3}{e^x} \\ &= \frac{(e^x)^2 - 2e^x + 1 + 2}{e^x}\end{aligned}$$

0.5 pt

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2+2}{e^x}$

b) Posons le tableau de variation de la fonction u :

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2+2}{e^x} > 0$

- Tableau de variation

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$u'(x)$	$+$
$u(x)$	$-\infty$ ↗ $+\infty$

0.25 pt

c) Déduisons le signe de la fonction u :

- Pour $x \in]-\infty;0]$, $x \leq 0$;

Puisque u est croissante sur $]-\infty;0]$ $\iff$ $u(x) \leq u(0) = 0$

Donc :

$$\forall x \in]-\infty;0]\, x \leq 0\ ,\ u(x) \leq 0$$

Yassine Elamri

- Pour $x \in [0;+\infty[$, $x \geq 0$;

Puisque u est croissante sur $[0;+\infty[\iff u(x) \geq u(0) = 0$

Donc :

$$\forall x \in [0;+\infty[\,, x \geq 0\ ,\ u(x) \geq 0$$

- Tableau de signe de la fonction u :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u(x)$		$-$	0	$+$	

0.5 pt

2 - a) Vérifions que : $V(x) = \mathrm{e}^x u(x)$:

On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ V(x) &= \mathrm{e}^{2x} - 2x\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3\\ &= \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 2x + 2 - 3\mathrm{e}^{-x}\right)\\ &= \mathrm{e}^x u(x)\end{aligned}$$

D'où : $V(x) = \mathrm{e}^x u(x)$

0.5 pt

b) Duiduisons le signe de la fonction V sur $\mathbb{R}$:

Puisque $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \mathrm{e}^x > 0$, donc le signe de $V(x)$ est le même que celui de $u(x)$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$V(x)$		$-$	0	$+$	

0.5 pt

3 - a) Montrons que la fonction W est une prémitive de la fonction V sur $\mathbb{R}$:

- On calcul la dérivé de $W(x)$

$$\begin{aligned}W'(x) &= \left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + (4-2x)\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x - 3x\right)'\\ &= \frac{1}{2} \times 2\mathrm{e}^{2x} + 4\mathrm{e}^{(}x) - 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - 3\\ &= \mathrm{e}^{2x} + 2\mathrm{e}^x - 2x\mathrm{e}^x - 3 = V(x)\end{aligned}$$

D'où : $W(x)$ est une primitive de $V(x)$ sur $\mathbb{R}$

0.5 pt

b) Calculons l'intérgrale : $\displaystyle\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x$:

Yassine Elamri

On a :

$$\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x = [W(x)]_0^2$$
$$= W(2) - W(0)$$
$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + (4-4)\mathrm{e}^2 + 2\mathrm{e}^2 - 6 - \left(\frac{1}{2} + 4\right)$$
$$= \frac{\mathrm{e}^4 - 21}{2}$$

Donc : $\int_0^2 V(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^4 - 21}{2}$

0.5 pt

c) Montrons que $\frac{9}{2}$ est le minimum absolu de la fonction W sur $\mathbb{R}$:

On a la dérivé de la fonction W s'annule en $x = 0$ $(V(0) = 0)$

Donc la fonction $W(x)$ admet un extremum en point $x = 0$.

Calculons $W''(x)$:

lu de la fonction W sur $\mathbb{R}$

< 0

0.5 pt

- Pour $x \in [0;1]$, $x \leq 1$

Puisque g est décroissante sur $[0;1]$ $\iff$ $g(x) \geq g(1) = 0$

https://steinmath.com
Today better than yesterday, tomorrow better than

Donc : $\forall x \in [0;1]\,,\ g(x) \geq 0$

- Pour $x \in [1;+\infty[\ ,\ x \geq 1$

Puisque g est décroissante sur $[1;+\infty[\iff g(x) \leq g(1) = 0$

Donc : $\forall x \in [1;+\infty[\ ,\ g(x) \leq 0$

- Tableau de signe :

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

0.5 pt

Partie II

1 - Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x) = +\infty$

(car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$)

Donc (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$

2 - a) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)$

On pose $t = 1 - x \iff x = 1 - t$ donc si $x \to +\infty$ alors $x \to -\infty$

Alors :

$$\begin{aligned}
&\lim_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t - (1-t)^2 + 5(1-t) - 3 - 2\ln(1-t)\\
&= \lim_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t + (1-t)^2\left(-1 + \frac{5}{1-t} - \frac{3}{(1-t)^2} - \frac{\ln(1-t)}{(1-t)^2}\right)\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

0.5 pt

(Car $\lim\limits_{t\to-\infty} t\mathrm{e}^t = 0$et $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{5}{1-t} - \dfrac{3}{(1-t)^2} - \dfrac{\ln(1-t)}{(1-t)^2} = 0$)

b) Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$:

0.5 pt

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{(1-x)\mathrm{e}^{1-x}}{x} - \frac{x^2}{x} + \frac{5x-3}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{x} - 1)\mathrm{e}^{1-x} - x + 5 - \frac{3}{x} - 2\frac{\ln(x)}{x} = -\infty
\end{aligned}$$

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{1}{x} - 1)\mathrm{e}^{1-x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{3}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -x + 5 = -\infty$)

Interprétation :

Yassine Elamri

(C) admet une branche parabolique de direction les axes des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.25 pt

1 pt **3 - a)** Calcul de la dérivé : $\forall x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((1-x)\mathrm{e}^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln(x)\right)' \\ &= -\mathrm{e}^{1-x} - (1-x)\mathrm{e}^{1-x} - 2x + 5 - \frac{2}{x} = -2\mathrm{e}^{1-x} + x\mathrm{e}^{1-x} - 2x + 1 + 4 - \frac{2}{x} \\ &= -2\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right) + x\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right) \\ &= (x-2)\left(\mathrm{e}^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right) \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = (x-2)g(x)$

b) Etudions la monotonie de f :

0.75 pt Puisque le signe de g est déterminé (d'après la question I-2) donc le signe de $f'(x)$ est donnée par le tableau suivant

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$	‖	$-$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f'(x) = (x-2)g(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	

D'après le tableau précédent sur les intervalles $]0;1]$ et $[2;\infty[$, on a $f'(x) < 0$ donc la fonction f est décroissante sur les intervalles $]0;1]$ et $[2;\infty[$. et dans l'intervalle $[1;2]$ la

0.25 pt dérivé f' est positive , donc f est croissante sur $[1;2]$.

c) tableau de variation

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	1.25	↘	$-\infty$

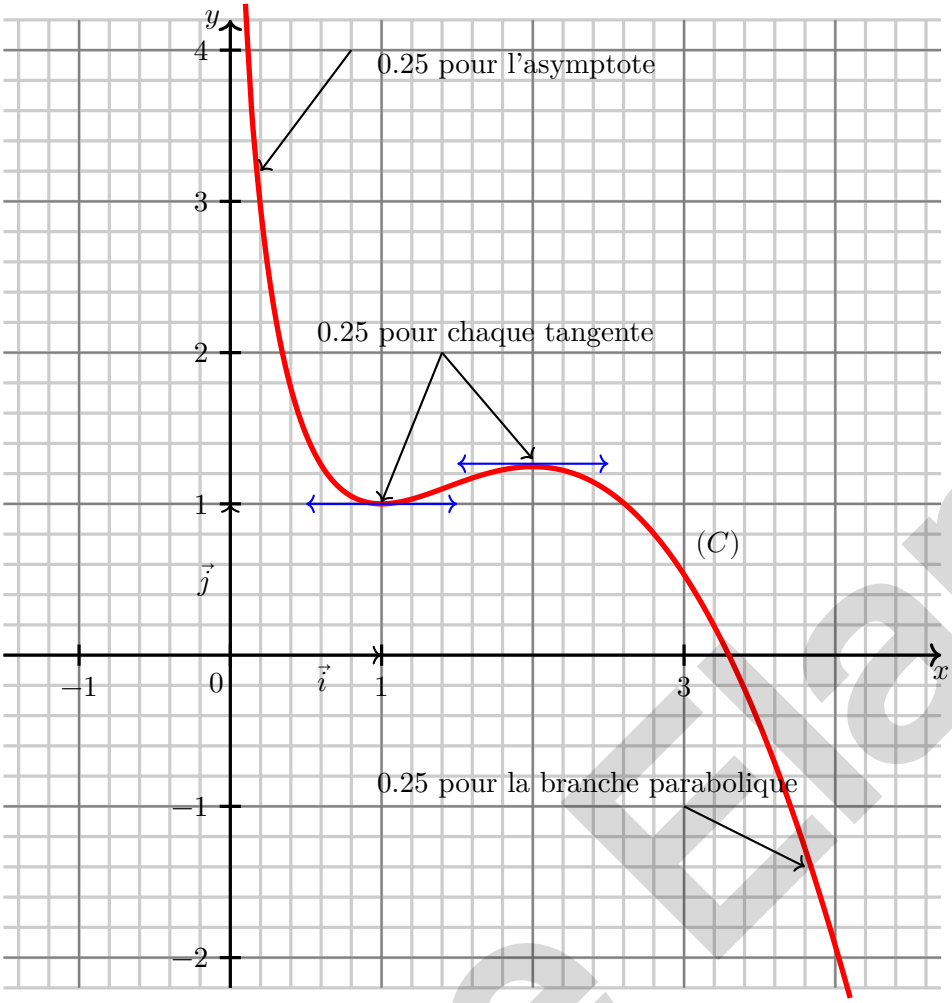
0.5 pt **4 -** La fonction f est une fonction continue sur $]0;+\infty[$ et en particulier $]3;4[$ et la fonction f est strictement décroissante sur $]3;4[$ et le $f(3) \times f(4) < 0$

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $]3;4[$.

1 pt **5 -** Construction de la figure

Yassine Elamri



Partie III

1 - a) dans l'intervalle $[1;2]$ la fonction admet un maximum pour $x = 0$

0.5 pt Donc $h(x) \leq 0 \iff f(x) - x \leq 0$

$$\forall x \in [1;2] \ , \ f(x) \leq x$$

b) On a la fonction h est continue et strictement décroissante sur $[1;2]$

et comme $0 \in h([1;2])$; donc l'équation $h(x) = 0$ admet unique solution dans l'intervalle $[1;2]$

Or $h(1) = 0$ alors 1 est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$ dans l'intervalle $[1;2]$

0.25 pt Donc l'équation $f(x) = x$ admet 1 comme une unique solution dans l'intervalle $[1;2]$.

0.75 pt **2 - a)** a) Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 1 \leq u_n \leq 2$

Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On suppose que $1 \leq \bar{u}_n \leq 2$, montrons que : $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. On a

$$1 \leq u_n \leq 2 \underbrace{\Longrightarrow}_{f \text{ est } \nearrow \text{ sur } [1,2]} f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

Yassine Flamri

et comme $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1,2]$ alors $f(2) \leq 2$

Donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

0.5 pt

b) Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante :

On a pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) \leq x$

et comme $u_n \in [1,2]$, donc $f(u_n) \leq u_n$

D'où

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} \leq u_n$$

Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) Déduisons que la suite est convergente

0.75 pt

On a : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. et comme elle est minorée par 1 , alors elle est convergente.

Calculons $\lim_{n\to+\infty} u_n$:

On a :

i. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$

ii. $u_0 \in [1,2]$.

iii. f est continue sur $[1,2]$

iv. $f([1,2]) \subset [1,2]$

v. la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

Donc sa limite ℓ $(\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell)$ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1,2]$

Puisque 1 est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ sur $[1,2]$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Yassine Elamri