ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2022

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (4 pts)

0.25 pt **1 -** On a : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n + 5}$

Donc

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0}{2u_0 + 5}, \\ &= \frac{2 \times \frac{3}{2}}{2 \times \frac{3}{2} + 5} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

0.5 pt **2 -** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n > 0$

On a $u_0 = \dfrac{3}{2} > 0$

Donc la proposition est vrai pour $n = 0$.

Supposons que : $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 0$

montrons que : $u_{n+1} > 0$

On a :

$$\begin{aligned} u_n > 0 &\implies 2u_n > 0 \ et \ 2u_n + 5 > 0 \\ &\implies \frac{2u_n}{2u_n + 5} > 0 \\ &\implies u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$

Donc d'après le raisonnement par récurrence, on a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n > 0$

1 pt **3 - a)** Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}u_n$

On a d'après la question présidente $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n > 0$

T than yesterday, tomorrow better than today

Donc $u_{n+1} > 0$

Et on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n &= \frac{2u_n}{2u_n+5} - \frac{2}{5}u_n \\ &= \frac{10u_n - 2u_n(2u_n+5)}{5(2u_n+5)} \\ &= \frac{-4u_n^2 - 10u_n + 10u_n}{10u_n+25} \\ &= \frac{-4u_n^2}{10u_n+25} \leq 0 \end{aligned}$$

Alors $u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

0.5 pt **b)** — Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$

Pour : $n = 0$ on a : $0 < u_1 \leq \frac{2}{5}u_0$

Pour : $n = 1$ on a : $0 < u_2 \leq \frac{2}{5}u_1$

Pour : $n = 2$ on a : $0 < u_3 \leq \frac{2}{5}u_2$

.....

.....

.....

Pour : $n-1$ on a : $0 < u_n \leq \frac{2}{5}u_{n-1}$

On fait la multiplication coté par coté et on obtient :

$0 < u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1}$

$0 < \cancel{u_1} \times \cancel{u_2} \times \ldots \times \cancel{u_{n-1}} \times u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n u_0 \times \cancel{u_1} \times \cancel{u_2} \times \ldots \times \cancel{u_{n-1}}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$

— On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0 \quad \left(car : -1 < \frac{2}{5} < 1\right)$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

0.75 pt **4 - a)** Montrons que : $(v_n)_n$ est une suite géométrique.

On a : $v_n = \frac{4u_n}{2u_n+3}$

Yassine Elamri

Donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3} \\ &= \frac{4\times\frac{2u_n}{2u_n+5}}{2\times\frac{2u_n}{2u_n+5}+3} \\ &= \frac{\frac{8u_n}{\cancel{2u_n+5}}}{\frac{4u_n+6u_n+15}{\cancel{2u_n+5}}} \\ &= \frac{2}{5}\times\frac{4u_n}{2u_n+3} \\ &= \frac{2}{5}\times u_n \end{aligned}$$

Donc $(v_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

1 pt **b)** On a : $v_0 = \frac{4u_0}{2u_0+3} = 1$

On a : $(v_n)_n$ suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = 1$

Donc

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= \left(\frac{2}{5}\right)^n \end{aligned}$$

Exercice 2 : (5 pts)

0.5 pt **1 - a)** On a :

$$\begin{aligned} \Delta &= \left(-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right)^2 - 4\times 1\times 16 \\ &= 4(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 - 64 \\ &= 4(8+4\sqrt{3}) - 64 \\ &= 16\sqrt{3} - 32 \\ &= -4(8-4\sqrt{3}) \\ &= -4(6-4\sqrt{3}+2) \\ &= -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2 < 0 \end{aligned}$$

1 pt **b)** L'équation admet deux solutions complexes :

Yassine Elamri

$$z_1 = \frac{2(\sqrt{2}+\sqrt{6}) - 2i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6} - i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

Et

$$z_2 = \bar{z_1}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$

0.75 pt **2 - a)** On a :

$$b\bar{c} = (1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})$$
$$= \sqrt{2} - i\sqrt{2} + i\sqrt{6} + \sqrt{6}$$
$$= \sqrt{2}+\sqrt{6} + i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$$
$$= a$$

D'où $b\bar{c} = a$

On a :

$$b\bar{c} = a \implies b\bar{c}c = ac$$
$$\implies ac = b|c|^2$$
$$\implies ac = b\left(\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2\right)$$
$$\implies ac = 4b$$

0.5 pt **b)** On a :

$$b = 1 + i\sqrt{3}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Et

$$c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$
$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Yassine Elamri

0.5 pt **c)** On a : $c = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc $\bar{c} = 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$

Et on a :

$$\begin{aligned} a &= b\bar{c} \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \times 2\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{-\pi}{4}\right)\right) \\ &= 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) \end{aligned}$$

0.5 pt **3 - a)** On a :

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\iff z' - z_o = e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_o) \\ &\iff z' = \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) z \end{aligned}$$

On a : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Donc $\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = \frac{1}{4}a$

D'où $R(M) = M' \iff z' = \frac{1}{4}az$

0.25 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned} z' &= \frac{1}{4}a \times c \\ &= \frac{1}{4} \times 4b \quad \text{(d'après la question 2-a, on a ac=4b)} \\ &= b \end{aligned}$$

D'où B est l'image de C par la rotation R.

c) On a :

$$\begin{aligned} R(C) = B &\iff \frac{b - z_o}{c - z_o} = e^{i\frac{\pi}{12}} \\ &\iff \left|\frac{b - z_o}{c - z_o}\right| = 1 \; et \; Arg\left(\frac{b - z_o}{c - z_o}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi] \\ &\iff BO = CO \; et \; Arg\left(\frac{b - z_o}{c - z_o}\right) \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc OBC est triangle isocèle en O.

0.75 pt **d)** — On a : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

Yassine Elamri

Donc

$$\begin{aligned} a^4 &= 4^4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^4 \\ &= 256\left(\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{12}\right)\right) \\ &= 256\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= 256\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 128(1+i\sqrt{3}) \\ &= 128b \end{aligned}$$

— On a :

$$\frac{a^4}{b}=128 \Longrightarrow \frac{d-z_o}{b-z_o}=128\in\mathbb{R}$$

D'où D, B et O sont alignés.

Exercice 3 : (4 pts)

0.5 pt **1 - a)** On a g est dérivable sur $]0,+\infty[$

Donc pour touts x de $]0,+\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}-\frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x} \end{aligned}$$

0.5 pt **b)** On a : $(\forall x\in[1,+\infty[)$

$$\begin{aligned} x\geq 1 &\Longrightarrow \sqrt{x}\geq 1 \\ &\Longrightarrow \sqrt{x}-1\geq 0 \\ &\Longrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{x}\geq 0 \end{aligned}$$

D'où $(\forall x\in[1,+\infty[)\,,\ g'(x)\geq 0$

Donc g est croissante sur $]0,+\infty[$

0.5 pt **c)** Pour touts $x\in[1,+\infty[$, on a $x\geq 1\Longrightarrow \ln x\geq 0$

Comme g est croissante sur $[1,+\infty[$, donc $g(x)\geq g(1)=0$

D'où $2\sqrt{x}-2-\ln(x)\geq 0\Longrightarrow \ln(x)\leq 2(\sqrt{x}-1)\leq 2\sqrt{x}$

Donc $\forall x\in[1,+\infty[\,,\ 0\leq\ln(x)\leq 2\sqrt{x}$

1 pt **d)** On a : $\forall x\in[1,+\infty[$

Yassine Elamri

$$0 \leq \ln(x) \leq 2\sqrt{x} \implies 0 \leq \ln^3(x) \leq 8x\sqrt{x}$$
$$\implies 0 \leq \frac{\ln^3(x)}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2}$$
$$\implies 0 \leq \frac{\ln^3(x)}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}$$

Et on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln^3(x)}{x^2} = 0$

2 - a) On a G est dérivable sur $]0,+\infty[$

0.75 pt Et $(\forall x \in]0,+\infty[)$

$$\begin{aligned} G'(x) &= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + x\left(\frac{2}{3\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right) \\ &= -1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x) + \frac{2}{3}\sqrt{x} - 1 \\ &= 2\sqrt{x} - 2 - \ln(x) \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Donc G est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

0.75 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned} \int_1^4 g(x)\,dx &= \left[x\left(-1 + \frac{4}{3}\sqrt{x} - \ln(x)\right)\right]_1^4 \\ &= 4\left(-1 + \frac{8}{3} - \ln(4)\right) - \left(-1 + \frac{4}{3}\right) \\ &= \frac{28}{3} - 3 - 4\ln 4 \end{aligned}$$

Problème : (7 pts)

0.5 pt **1 -** On a : $f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right) \\ &= +\infty \quad (\text{car : on a } \lim_{x\to-\infty} x + \frac{5}{2} = -\infty \text{ d'où } \lim_{x\to-\infty} e^{x-2} = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right) \\ &= -\infty \quad (\text{car : on a } \lim_{x\to+\infty} x + \frac{5}{2} = +\infty \text{ d'où } \lim_{x\to+\infty} e^{x-2} = +\infty) \end{aligned}$$

0.5 pt **2 - a)** On a :

Yassine Elamri

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x)-y &= \lim_{x\to-\infty} \cancel{-x}+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)+\cancel{x}-\frac{5}{2}\\ &= \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)\\ &= 0 \quad (\text{car : on a } \lim_{x\to-\infty} e^{x-2}=0)\end{aligned}$$

D'où la droite (Δ) d'équation : $y=-x+\dfrac{5}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt **b)** On a :

$$\begin{aligned}e^{x-2}-4=0 &\iff e^{x-2}=4\\ &\iff e^{x-2}=e^{\ln 4}\\ &\iff x-2=\ln 4\\ &\iff x=\ln 4+2\end{aligned}$$

On a : $f(x)-y=-\frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$

Donc le signe de $f(x)-y$ est l'opposé de $e^{x-2}-4$

Et on a :

x	$-\infty$		$2+\ln 4$		$+\infty$
$e^{x-2}-4$		$-$	0	$+$	

Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty;2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4;+\infty[$.

0.5 pt **3 -** On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to+\infty} -1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\times\frac{e^{x-2}}{x}\left(e^{x-2}-4\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty} -1+\frac{5}{2x}-\frac{1}{2}\times\frac{e^{x-2}}{x-2}\times\frac{x-2}{x}\left(e^{x-2}-4\right)\end{aligned}$$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{x-2}}{x-2}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ (avec $t=x-2$)

Et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-2}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-2}=+\infty$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$$

Alors $(\mathcal{C}_f)$admet une branche parabolique dirigée vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

Yassine Elamri

0.5 pt **4 - a)** On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right) - \frac{1}{2}e^{x-2}\times e^{x-2} \\ &= -1 - \frac{1}{2}\left(e^{x-2}\right)^2 + 2e^{x-2} - \frac{1}{2}\left(e^{x-2}\right)^2 \\ &= -1 - \left(e^{x-2}\right)^2 + 2e^{x-2} \\ &= -\left(\left(e^{x-2}\right)^2 - 2e^{x-2} + 1\right) \\ &= -\left(e^{x-2}-1\right)^2 \end{aligned}$$

0.25 pt **b)** On a $f'(x) = -\left(e^{x-2}-1\right)^2 \leq 0$. D'où

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	2	↘	$-\infty$

0.75 pt **5 -** On a f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(-\left(e^{x-2}-1\right)^2\right)' \\ &= -2e^{x-2}\left(e^{x-2}-1\right) \end{aligned}$$

Le signe de f'' est le signe opposé de $\left(e^{x-2}-1\right)$

Et on a :

$$\begin{aligned} e^{x-2}-1=0 &\implies e^{x-2}=1 \\ &= x-2=0 \\ &= x=2 \end{aligned}$$

Et

$$e^{x-2}-1>0 \implies x>2$$

D'où

Yassine Elamri

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$e^{x-2}-1$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	

On f'' s'annule en 2 et elle change leur signe, alors $A(2,2)$ est le point d'inflexion de $(\mathcal{C}_f)$.

0.5 pt

6 - On a f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $[2+\ln 3; 2+\ln 4]$.

Et on a f est strictement décroissante sur $[2+\ln 3; 2+\ln 4]$.

Et on a :

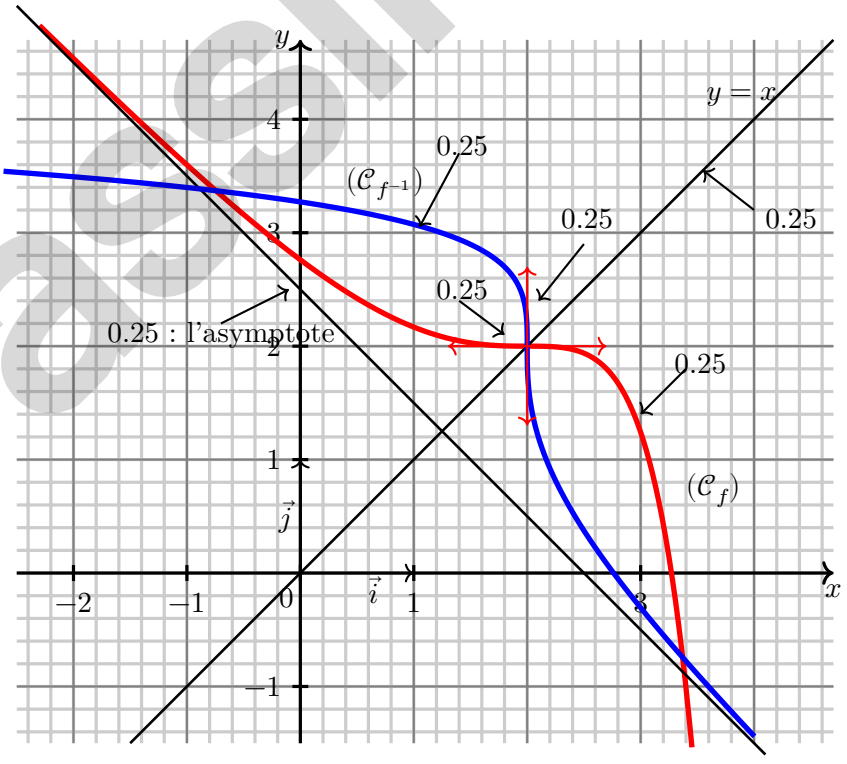
$$\begin{aligned} f(2+\ln 3) &= -2-\ln 3+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{\ln 3}(e^{\ln 3}-4) \\ &= -2-\ln 3+\frac{5}{2}+\frac{3}{2} \\ &= 2-\ln 3>0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(2+\ln 4) &= -2-\ln 4+\frac{5}{2} \\ &= \frac{1}{2}-\ln 4<0 \end{aligned}$$

D'où $f(2+\ln 3)\times f(2+\ln 4)<0$

Donc d'après Théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α avec $2+\ln 3<\alpha<2+\ln 4$.

7 - Traçons $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$



Yassine Elamri

0.5 pt **8 - a)** On a f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) La construction de $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$.

0.5 pt **c)** On a :

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(2-\ln 3) &= \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2-\ln 3)\right)} \\ &= \frac{1}{f'(2+\ln 3)} \\ &= \frac{-1}{2^2} = \frac{-1}{4}\end{aligned}$$

Yassine Elamri

FIN