ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2019

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1,-1,-1)$, $B(0,-2,1)$ et $C(1,-2,0)$.

0,75 pt **1 - a) Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$**

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\-2+1\\1+1\end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-1\\-2+1\\0+1\end{pmatrix}$ Alors $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

D'où :

$$\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=(-1+2)\vec{i}-(-1+0)\vec{j}+(1+0)\vec{k}$$

$$=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$$

Donc, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

0,5 pt **b) Déduisons que $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).**

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,-1,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc l'équation du plan (ABC) est de la forme : $x+y+z+d=0$.

Le point $A(1,-1,-1)$ appartienne au plan (ABC) donc : $1-1-1+d=0$ d'où $d=1$.

Donc, $x+y+z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - Soit (S) la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$

0,75 pt **Montrons que le centre de la sphère (S) est $\Omega(2,-1,1)$ et que son rayon est $R=\sqrt{5}$.**

on a :

$$x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2+2y+1}_{(y+1)^2}-1+\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5=\sqrt{5}^2$$

La dernière écriture représente l'équation cartésienne de la sphère de centre $\Omega(2,-1,1)$ et de rayon $\mathbf{R=\sqrt{5}}$

Donc ,la sphère (S) a pour centre le point $\Omega(2,-1,1)$ et pour rayon $R=\sqrt{5}$

0,5 pt **3 - a) Calculons $d(\Omega,(ABC))$ la distance du point Ω au plan (ABC).**

On a : $d(\Omega,(ABC))=\frac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$.

on remplace $x+y+z+1$ (sans écrire $=0$) par les coordonnées de $\Omega(2,-1,1)$)

Donc, $d(\Omega,(\text{ABC}))=\sqrt{3}$

0,5 pt **b) Déduisons que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle(Γ)** (la détermination du centre et du rayon de (Γ) n'est pas demandée)

Puisque le rayon du cercle est $R=\sqrt{5}$ et on a ; $d(\Omega,(\text{ABC}))=\sqrt{3}<\sqrt{5}$

Alors, l'intersection du plan (ABC) et la sphère (S) sera un cercle (Γ).

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2-2z+4=0$

0,75 pt On calcule :le discriminant Δ : On a : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12<0$.

D'où l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{2+i\sqrt{-\Delta}}{2\times1}=\frac{2+i\sqrt{12}}{2}=\frac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3} \text{ et } z_2=\bar{z}_1=1-i\sqrt{3}$$

Donc, ensemble des solutions de l'équation est : $S=\{1+i\sqrt{3};1-i\sqrt{3}\}$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a=1-i\sqrt{3}$, $b=2+2i$, $c=\sqrt{3}+i$ et $d=-2+2\sqrt{3}$.

0,5 pt **a) Vérifions que $a-d=\sqrt{3}(c-d)$.** On a :

$$c-d=\sqrt{3}+i-(-2+2\sqrt{3})=-\sqrt{3}+2+i$$

$$a-d=1-i\sqrt{3}-(-2+2\sqrt{3})=3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}=-\sqrt{3}(\underbrace{-\sqrt{3}+2+i}_{c-d})=-\sqrt{3}(c-d)$$

Donc, $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

Today better than yesterday https://steinmath.com than today
Yassine Flamri

0,25 pt

b) Déduisons que les points A, C et D sont alignés. On a :

- Le vecteur $\overrightarrow{DA}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DA}} = a - d$.
- Le vecteur $\overrightarrow{DC}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{DC}} = c - d$

$$\mathbf{a - d = -\sqrt{3}(c - d) \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA}} = -\sqrt{3} z_{\overrightarrow{DC}}}$$
$$\mathbf{\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} = -\sqrt{3}\overrightarrow{DC}}$$

Par suite les deux vecteurs $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires donc les points A et C et D sont alignés .

Donc, les points A , C et D sont alignés .

3 - On considère z l'affixe d'un point M et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{3}$

0,5 pt

Vérifions que $z' = \frac{1}{2}az$.

L'écriture complexe de la rotation R est de la forme : $z' - \omega = (z - \omega)e^{i\theta}$ avec ω est l'affixe du centre de la rotation et θ est l'angle de la rotation.

D'où : $z' - 0 = (z - 0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{z'} &= z \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right) \\
&= z \times \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \\
&= z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= z\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \\
&= \frac{1}{2}az \quad ;(\text{car} : 1 - i\sqrt{3} = a)
\end{aligned}$$

Donc, $z' = \frac{1}{2}az$.

4 - Soient H l'image du point B par la rotation R, h son affixe et P le point d'affixe p tel que $p = a - c$.

0,5 pt

a) Vérifions que $h = ip$. On a :

Yassine Elamri

$$\mathbf{R(B) = H \Leftrightarrow h = \frac{1}{2}ab}$$
$$\Leftrightarrow h = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})(2 + 2i)$$
$$\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3})(1 + i)$$
$$\Leftrightarrow h = (1 - i\sqrt{3}) + i(1 - i\sqrt{3})$$
$$\Leftrightarrow h = i(-i - \sqrt{3}) + i(\underbrace{1 - i\sqrt{3}}_{-c})$$
$$\Leftrightarrow h = i(a - c)$$
$$\Leftrightarrow h = ip$$

donc, $h = ip$.

0,5 pt **b) Montrons que le triangle (OHP) est rectangle et isocèle en O.** On a :

$$\frac{h-0}{p-0} = \frac{ip}{p} = i \Rightarrow \begin{cases} \frac{|h-0|}{|p-0|} = |i| \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \arg\left(\frac{h-0}{p-0}\right)[2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}} = 1 \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{\mathrm{OH}}) \equiv \arg(\mathrm{i})[2\pi]; \left(\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{p}} = \mathrm{i}\right) \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{OH} = \mathrm{OP} \\ (\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OH}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

Donc on a :

- OH = OP d'où le triangle OHP est isocèle en O.
- $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}, \overrightarrow{\mathrm{OH}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ d'où le triangle OHP est rectangle en O.

Donc, le triangle (OHP) est rectangle et isocèle en O.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient dix boules : trois boules vertes, six boules rouges et une boule noir indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : ≪ **Obtenir trois boules vertes** ≫

B : ≪ **Obtenir trois boules de même couleur** ≫

C : ≪ **Obtenir au moins deux boules de même couleur** ≫

2 pt **1 - Montrons que $P(A) = \frac{1}{120}$ et $P(B) = \frac{7}{40}$**

▷ On calcule card Ω : (ou encore le nombre des tirages possibles).

Yassine Elamri

Tirer simultanément 3 boules parmi 10 boules présente une combinaison de 3 parmi 10 ,.

d'où le nombre des tirages possibles est le nombre des combinaisons de 3 parmi 10 ce nombre est :

$$\text{card}\,\Omega = C_{10}^3 = \frac{10\times9\times8}{1\times2\times3} = 120.$$

$$\text{donc : } \text{card}\,\Omega = C_{10}^3 = 120.$$

On calcule cardA : (le nombre des tirages qui réalisent l'événement A).

l'événement A « les 3 boules tirées sont vertes » Tirées 3 boules vertes simultanément parmi 3 boules vertes de l'urne ceci présente une combinaison de 3 parmi 3 .

Donc le nombre des tirages qui réalisent l'événement A est $C_3^3 = \frac{3\times2\times1}{1\times2\times3} = 1$

donc : $\text{card A} = \text{C}_3^3 = 1$

Conclusion : $p(A) = \frac{\text{card}\,A}{\text{cordO}} = \frac{C_3^3}{C^3} = \frac{1}{120}$.

▷ On calcule cardB : (le nombre des tirages qui réalisent l'événement B).

l'événement B «les 3 boules tirées sont de même couleur»

ou encore l'événement B est B «les 3 boules tirées sont vertes ou les boules sont rouges ».

• les 3 boules tirées simultanément sont vertes parmi 3 boules vertes de l'urne on a :

$$\text{cardA} = C_3^3 = 1$$

• les 3 boules tirées simultanément sont rouges parmi 6 boules rouges de l'urne on a :

$$C_6^3 = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} = 20$$

D'où : $\text{cardB} = C_3^3 + C_6^3 = 1 + 20 = 21$

donc : $p(B) = \frac{\text{cardB}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{C_3^3+C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{21}{120} = \frac{7\times\beta}{\beta\times40} = \frac{7}{40}$.

Conclusion : $p(B) = \frac{7}{40}$ Donc, $P(A) = \frac{1}{120}$ et $P(B) = \frac{7}{40}$

1pt **2 - Calculons $p(C)$.**

On calcule cardC : (le nombre des tirages qui réalisent l'événement C) .

C « au moins deux boules de même couleur »

ou encore C « exactement deux boules de même couleur ou exactement trois boules de même couleur »

L'événement contraire de l'événement C est l'événement $\overline{\text{C}}$

$\overline{\text{C}}$ « les trois boules de couleurs différentes »

Donc : $\text{card}\,\bar{C} = C_3^1 \times C_6^1 \times C_1^1 = 3\times6\times1 = 18.$

Par suite $\text{card}\,\text{C} = \text{card}\,\Omega - \text{card}\,\bar{C} = 120 - 18 = 102.$

Donc :

$$p(C) = \frac{\text{cardC}}{\text{card}\,\Omega} = \frac{\text{card}\,\Omega - \text{card}\,\bar{C}}{C_{10}^3} = \frac{120-18}{120} = \frac{102}{120} = \frac{6\times17}{6\times20} = \frac{17}{20}$$

Yassine Elamri

Donc, $p(C)$.

Exercice 4 : (11 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité:1 cm)

Partie I

0,5 pt **1 - Calculons $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interprétons le résultat géométriquement.**

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x = -\infty \Rightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\ln x = +\infty \\ \lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\ln x)^2 = +\infty \end{cases}$

Donc, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 = +\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

On interprète le résultat géométriquement :

Puisque on a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = +\infty$

Alors, la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $\mathbf{x = 0}$.

0,25 pt **2 - a) Vérifions que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$**

On a :

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln x \times \ln x - \ln x \\ &= x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Conclusion : pour tout x de $]0,+\infty[$: $f(x) = x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x$

0,5 pt **b) Déduisons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.**

On a : $\lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Donc $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x = +\infty$.

D'où : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(x + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x\right) = +\infty$.

Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomohttps://steinmath.comday

c) Montrons que $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ pour tout x de $]0,+\infty[$, puis Déduisons que $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$. 0,5 pt

• **Montrons que pour tout x de $]0,+\infty[$,**

On a :

$$\begin{aligned}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{(\sqrt{x})^2}\\ &= \frac{(2\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}; (\ln x^r = r\ln x; r\in\mathbb{Q})\\ &= \frac{4(\ln\sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2}\\ &= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\end{aligned}$$

Donc, $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$.

• **Déduisons que $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.** On a :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\\ &= \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2; (t=\sqrt{x}; x\to+\infty; t\to+\infty)\\ &= 0 \quad ; \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0\right)\end{aligned}$$

Donc, $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$.

d) Montrons que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$ 0,75 pt

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x} = 1.$

$\left(\text{car } \lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{2x} = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0\right)$

D'où : $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1.$

$\triangleright \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x-x = +\infty \quad (\text{car} : \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty)$

Donc $b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty$

Par suite :

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 1$ et $b = \lim_{x\to+\infty} f(x)-x = +\infty.$

Yassine Elamri

Donc, (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction asymptotique la droite (Δ) d'équation $y = x$

0,5 pt **3 - a) Montrons que pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \leq 0$ et pour tout x de $[1,+\infty[$:** $(x-1)+\ln x \geq 0$

▷ **Montrons que : pour tout x de $]0,1]$:** $(x-1)+\ln x \leq 0$

On a : $0 < x \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-1 \leq 0 \\ \ln x \leq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow (x-1)+\ln x \leq 0$ (car la somme de deux nombres négatifs est un nombre négatif)

Donc : pour tout x de $]0,1]$: $(x-1)+\ln x \leq 0$

▷ **Montrons pour tout x de $[1,+\infty[$:** $(x-1)+\ln x \geq 0$**.**

On a : $x \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ \ln x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)+\ln x \leq 0$ (car la somme de deux nombres positifs est un nombre positif)

Donc : pour tout x de $[1,+\infty[$: $(x-1)+\ln x \geq 0$.

Conclusion : $\begin{cases} \text{pour tout } x \text{ de }]0,1] : (x-1)+\ln x \leq 0 \\ \text{pour tout } x \text{ de } [1,+\infty[: (x-1)+\ln x \geq 0 \end{cases}$

1 pt **b) Montrons que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-1+\ln x}{x}$.**

On a pour tout x de $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2)' \\ &= 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\ln x \\ &= \frac{x-1+\ln x}{x} \end{aligned}$$

Donc, $f'(x) = \dfrac{x-1+\ln x}{x}$.

0,5 pt **c) Dressons le tableau de variations de la fonction f**

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

Yassine Flamri

0,5 pt

4 - a) Montrons que $f''(x) = \dfrac{2-\ln x}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

Pour tout x de $]0,+\infty[$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)' \\ &= \frac{(1+\frac{1}{x})\times x-(x-1+\ln x)\times 1}{x^2} \\ &= \frac{x+1-x+1-\ln x}{x^2} \\ &= \frac{2-\ln x}{x^2} \end{aligned}$$

0,5 pt

b) Déduisons que (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

Le singe de f'' dépend du singe de $2-\ln x$.

• On a : $2-\ln x = 0 \Leftrightarrow ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = e^2$

Alors f'' s'annule en e^2

• Et on a : $2-\ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq 2 \Leftrightarrow 0 < x \leq e^2$

Alors f''est positive sur $]0,e^2[$

• Et on a : $2-\ln x \leq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq e^2$

Alors f''est négative sur $]e^2,+\infty$

D'où le singe de f'' est donné par le tableau suivant :

x	0		e^2		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$+$	0	$-$	

$\triangleright$ On déduit que la fonction f'' s'annule et change le singe en e^2,

Alors, (C) admet un point d'inflexion de coordonnées $(e^2, f(e^2))$ avec $f(e^2) = e^2 + \frac{1}{2}$

0,5 pt

5 - a) Montrons que pour tout x de $]0,+\infty[$, $f(x) - x = \dfrac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ et déduisons la position relative de (C) et (Δ).

On a : $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$, alors

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - 2\ln x + (\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(1-\ln x)^2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 \end{aligned}$$

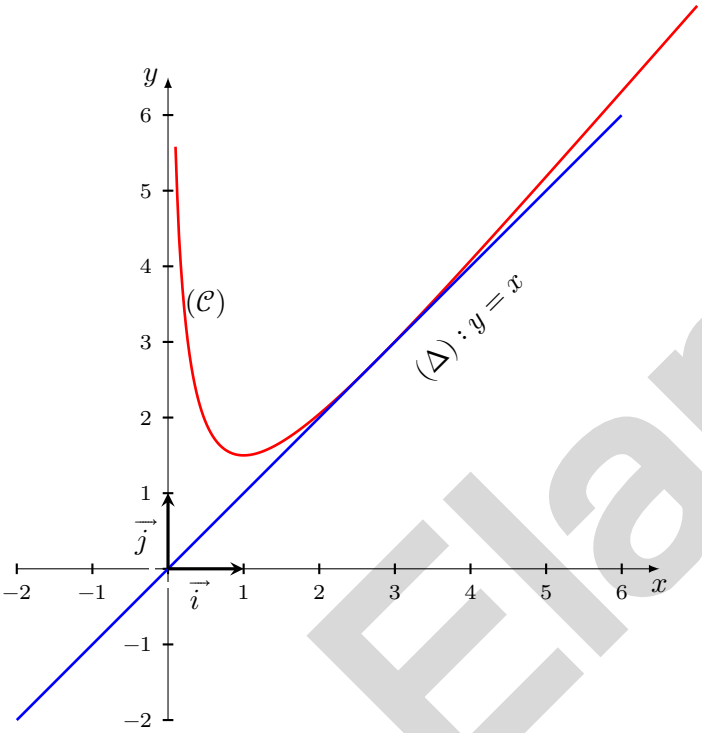
On étudie le singe de $f(x) - x$.

Puisque $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 \geq 0$ pour tout x de $]0,+\infty[$,

Yassine Elamri

Alors, (C) se trouve au dessus de (Δ) sur $]0,+\infty[$.

1pt **b) Construction de (Δ) et (C) dans le même repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$**



6 - a) Montrons que la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,5 pt

• Les fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, donc la fonction H est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x\ln x - x)' \\ &= x' \times \ln x + x \times (\ln x)' - 1 \\ &= 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 \\ &= \ln x + 1 - 1 \\ &= \ln x \end{aligned}$$

la fonction $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

0,75 pt **b) A l'aide d'une intégration par parties, montrons que $\int_1^e (\ln x)^2\ dx = e - 2$.**

Yassine Elamri

On pose $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = (\ln x)^2 \end{cases}$, alors $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x = \frac{2\ln x}{x} \end{cases}$.

$$\begin{aligned}
\int_1^e (\ln x)^2 dx &= \int_1^e v(x) \times u'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_1^e - \int_1^e u(x) \times v'(x) dx \\
&= [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e x\left(\frac{2\ln x}{x}\right) dx \\
&= [x(\ln x)^2]_1^e - 2\int_1^e \ln x dx \\
&= e(\ln e)^2 - 1(\ln 1)^2 - 2[x\ln x - x]_1^e \\
&= e - 0 - 2(e\ln e - e - 1\ln 1 + 1] \\
&= e - 0 - 2(e\ln e - e - 1\ln 1 + 1] \\
&= e - 2
\end{aligned}$$

Donc, $\int_1^e (\ln x)^2 \ dx = e - 2$

c) Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$. **0,5 pt**

On a $f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$, et on a : $(\Delta) : y = x$.

Puisque $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé d'unité 1 cm, alors $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm, donc l'unité d'aire est $u \cdot a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| = 1$ cm^2.

L'aire cherchée est : $\mathcal{A} = \left(\int_1^e |f(x) - x| dx\right) \times 1$ cm^2

On sait d'après la question 5)a) que $f(x) - x$ est positif sur $]0; +\infty[$ ((C) est au dessous de (D) sur $]0; +\infty[$).

Alors pour tout $x \in [1, e]$: $|f(x) - x| = f(x) - x$ Ce qui implique :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \left(\int_1^e f(x) - x dx\right) \times 1 \text{ cm}^2 \\
&= \left(\int_1^e x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 dx\right) \text{cm}^2 \\
&= \left[\frac{x}{2}\right]_1^e - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}(e-2)\text{cm}^2 \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - (e\ln e - e - 1\ln 1 + 1) + \frac{e}{2} - 1 \text{ cm}^2 \\
&= e - \frac{3}{2} - (e - e - 0 + 1)\text{cm}^2 \\
&= e - \frac{3}{2} - 1 \text{ cm}^2 \\
&= (e - \frac{5}{2}) \text{ cm}^2
\end{aligned}$$

Donc, l'aire du domaine plan limité par (C) et (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est $\mathcal{A} = (e - \frac{5}{2})$ cm^2

Yassine Elamri

Partie II

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **1 - Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.**

a) $\triangleright$ Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 1$, et $1 \leqslant 1 \leqslant e$.

Alors la propriété est vraie pour $n = 0$

$\triangleright$ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leqslant u_n \leqslant e$,

et on montre que $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant e$

On sait que d'après la question I) 3)c) que f est croissante sur $[1; +\infty[$, donc elle croissante sur $[1; e]$

Et par suite, en utilisant l'hypothèse de **récurrence** :

$$\begin{aligned} 1 \leqslant u_n \leqslant e &\Rightarrow f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(e) \\ &\Rightarrow \frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant e \\ &\Rightarrow 1 \leqslant \frac{3}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant e \end{aligned}$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leqslant u_n \leqslant e$$

Donc, d'après le raisonnement par récurrence $1 \leq u_n \leq e$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0,5 pt **b) Montrons que la suite (u_n) est croissante.** On sait d'après la question I)5)a) que $\forall x \in]0; +\infty[: f(x) - x \geqslant 0$

Alors en particulier : $\forall x \in [1; e] : f(x) \geqslant x$ $(*)$

D'autre part on a : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leqslant u_n \leqslant e$

c-à-d : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in [1; e]$

Alors tous les termes de la suite (u_n) vérifient aussi la relation $(*)$. Ce qui donne

$$f(u_n) \geqslant u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{c-à-d : } u_{n+1} \geqslant u_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Donc, la suite (u_n) est croissante.

0,5 pt **c) Déduisons que la suite (u_n) est convergente.**

On a (u_n) est une suite **croissante et majorée** par e,alors la suite (u_n) est convergente.

0,75 pt **2 - Calculons la limite de la suite (u_n)**

On a : $\triangleright$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$

$\triangleright$ La fonction f est continue sur $[1; e]$

$\triangleright$ $f([1; e]) = [\frac{3}{2}; e] \subset [1; e]$

Yassine Elamri

▷ La suite (u_n) est convergente

▷ $u_0 = 1 \in [1; e]$

Alors la limite de la suite (u_n) est une solution de l'équation $f(x) = x$ (dans l'intervalle $[1; e]$).

On a déjà montré que :

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

Alors : $\lim_{n\to+\infty} u_n = e.$

Yassine Elamri