ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Ratrappage 2018

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère la sphère (S) de centre $\Omega(2;1;2)$ et de rayon 3 et le plan (P) passant par le point $A(-1;0;3)$ et dont $\vec{u}(4;0;-3)$ est un vecteur normal.

0.5 pt **1 -** Montrons qu'une équation cartésienne de la sphère (S) est : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$.

Soit $M(x;y;z) \in (S)$,

On a :

$$\|\overrightarrow{\Omega M}\| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2} = 3$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1+z^2-4z+4=9$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0$$

Alors : $\boxed{x^2+y^2+z^2-4x-2y-4z=0}$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

0.5 pt **2 -** Vérifions qu'une équation cartésienne du plan (P) est $4x-3z+13=0$.

Soit $M(x;y;z) \in (P)$,

On a $\overrightarrow{AM}(x+1;y;z-3)$, donc :

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u} = 0 \Leftrightarrow (x+1)\times 4 + y\times 0 + (z-3)\times(-3) = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x+4-3z+9=0$$
$$\Leftrightarrow 4x-3z+13=0$$

D'où : $\boxed{4x-3z+13=0}$ est une équation cartésienne du plan (P).

0.5 pt **3 - a)** Vérifions que $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point Ω et orthogonale au plan (P).

On a (Δ) la droite qui passe par $\Omega(1,0,1)$ et perpendiculaire au plan (P), donc $\vec{u}(4,0,-3)$ est un vecteur directeur de (Δ).

Alors $(\forall M(x;y;z) \in (\Delta))$ on a : $\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \end{cases} \quad (\mathbf{t \in IR})$

D'où : $\boxed{\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \end{cases} \quad (\mathbf{t \in IR})}$ est une représentation paramétrique de (Δ).

b) Déterminons les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P) :

0.5 pt Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (P) Vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \\ 4x-3z+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \\ 4(2+4t)-3(2-3t)+13=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+4t \\ y = 1 \\ z = 2-3t \\ 25t+15=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ t = -\dfrac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = 1 \\ z = \dfrac{19}{5} \end{cases}$$

Donc $\boxed{H\left(-\frac{2}{5};1;\frac{19}{5}\right)}$.

0.25 pt **4 - a)** Calculons $d(\Omega,(P))$.

On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega;(P)) &= \frac{|4x_\Omega - 3z_\Omega + 13|}{\|\vec{u}\|} \\ &= \frac{|4\times 2 - 3\times 1 + 13|}{\sqrt{4^2+0^2+(-3)^2}} = \frac{15}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} \\ &= \boxed{3} \end{aligned}$$

0.75 pt **b)** Montrons que le plan (P) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

On a $d(\Omega;(P)) = 3 = R$ donc le plan (P) est tangent à la sphère (S) et leur point de

Yassine Elamri

contact est la projection orthogonale de Ω sur le plan $(\mathbf{P})$.

Or ce point est l'intersection de la droite (Δ) et du plan $(\mathbf{P})$ donc c'est le point $\boxed{H\left(-\frac{2}{5};2;\frac{19}{5}\right).}$

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation. $z^2-2\sqrt{2}z+4=0$:

On a le discriminant est $\Delta=b^2-4ac=(-2\sqrt{2})^2-4\times 4=8-16=-8<0$

D'où l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{2\sqrt{2}-i\sqrt{8}}{2\times 1}=\sqrt{2}(1-i) \quad \text{et} \quad z_2=\overline{z_1}=\sqrt{2}(1+i)$$

D'où $\boxed{S=\{\sqrt{2}(1-i);\sqrt{2}(1+i)\}}$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on considère le point A d'affixe $a=\sqrt{2}(1-i)$ et la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

0.25 pt **a)** Écrivons a sous forme trigonométrique.

On a : $a=\sqrt{2}(1-i)\Rightarrow |a|=\sqrt{2}\times\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

Donc $a=\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow a=2\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Donc : $\boxed{a=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}$

0.5 pt **b)** Vérifions que l'affixe du B l'image du point A par la rotation R est $b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}B=R(A)&\Leftrightarrow b-0=e^{i\frac{\pi}{3}}\times(a-0)\\&\Leftrightarrow b=a\times e^{i\frac{\pi}{3}}\\&\Leftrightarrow b=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\times\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\\&\Leftrightarrow b=2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\&\Leftrightarrow b=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{b=2\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)}$

0.5 pt **3 - a)** On considère le point C d'affixe $c=1+i$, montrons que $b^2-c^2=2\sqrt{3}$.

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better t https://steinmath.

On a :

$$\begin{aligned} b^2 - c^2 &= 2^2 \times \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 - (1+i)^2 \\ &= 4 \times \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) - (1^2 + 2i + i^2) \\ &= 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \times \frac{1}{2}i - 2i \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{b^2 - c^2 = 2\sqrt{3}}$

b) Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$ et D l'image du point B par la translation t.

0.5 pt Montrons que $OD = |b + c|$.

On a :

$$\begin{aligned} D = t(B) &\Leftrightarrow d = b + c \\ &\Leftrightarrow |d - 0| = |b + c| \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{OD = |b + c|}$

0.5 pt **c)** Déduisons que $OD \times BC = 2\sqrt{3}$.

$$\begin{aligned} OD \times BC &= |b + c| \times |c - b| = |(b + c)(c - b)| \\ &= |(c + b)(c - b)| = |c^2 - b^2| = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{OD \times BC = 2\sqrt{3}}$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 12 boules, indiscernables au toucher : réparties comme suit : 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 1, 3 boules de couleur rouge portant chacune le nombre 2 et 6 boules de couleur verte portant chacune le nombre 2.

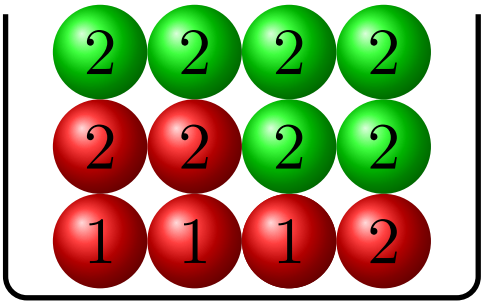
On tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. On considère les événements suivants :

A : "Obtenir deux boules portant le même nombre".

B : "Obtenir deux boules de couleurs différentes"

C : "Obtenir deux boules portant deux nombres dont la somme est égale à 3"

Yasine Elamri



On tire au hasard, simultanément deux boules de l'urne, donc $\mathbf{Card}(\Omega) = C_{12}^2 = 66$

1.5 pt **1 -** Montrons que : $p(A) = \dfrac{13}{22}$, $p(B) = \dfrac{6}{11}$ et calculons $p(C)$.

$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = C_3^2 + C_9^2 = 39$ $\{1,1\}$ ou $\{2,2\}$.

Donc : $P(A) = \dfrac{\mathbf{Card}(A)}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \dfrac{39}{66}$

D'où : $\boxed{P(A) = \dfrac{13}{22}}$

$\mathbf{CardB} = C_6^1 \times C_6^1 = 36$ $\{R, V\}$.

Donc : $P(B) = \dfrac{\mathbf{Card}(B)}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \dfrac{36}{66}$

D'où : $\boxed{P(B) = \dfrac{6}{11}}$

$\mathbf{Card}(C) = C_3^1 \times C_9^1 = 27$ $\{1,2\}$.

Donc : $P(C) = \dfrac{\mathbf{Card}(C)}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \dfrac{27}{66}$

D'où : $\boxed{P(C) = \dfrac{9}{22}}$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que : $p(A \cap B) = \dfrac{3}{11}$.

On a : $(A \cap B)$: "Obtenir 2 boules qui portent le même numéros et de couleurs différentes"

$\mathbf{Card}(A \cap B) = C_3^1 \times C_6^1 = 18$ $\{R_2, V_2\}$.

Donc : $P(A \cap B) = \dfrac{\mathbf{Card}(A \cap B)}{\mathbf{Card}\,\Omega} = \dfrac{18}{66}$

D'où : $\boxed{P(A \cap B) = \dfrac{3}{11}}$

b) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

0.5 pt On a : $P(A) \times P(B) = \dfrac{13}{22} \times \dfrac{6}{11} \neq \dfrac{3}{11}$, donc : $P(A) \times P(B) \neq P(A \cap B)$

D'où les événements A et B ne sont pas indépendants.

0.5 pt **3 -** Sachant que l'événement B est réalisé, calculons la probabilité de tirer deux boules qui portent le même nombre :

l'événement "Sachant que B est réalisé ; obtenir deux boules qui portent le même numéro " c'est l'evenement A sachant B ; Calculons $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{11}}{\frac{6}{11}} = \frac{1}{2}$$

Yassine Elamri

Donc $\boxed{P_B(A) = \frac{1}{2}}$

Exercice 4 : (2 pts)

1 - a) Montrons que la fonction $H : x \mapsto x\mathbf{e}^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)\mathbf{e}^x$ sur $\mathbb{R}$. **0.5 pt**

On a h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une fonction primitive sur $\mathbb{R}$, d'autre part : $H'(x) = (xe^x)' = e^x + xe^x = (x+1)e^x$ Donc la fonction $H : x \mapsto xe^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto (x+1)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déduisons que $\int_0^1 (x+1)\mathbf{e}^x\mathbf{d}x = \mathbf{e}$. **0.5 pt**

On a :

$$\int_0^1 (x+1)e^x dx = [H(x)]_0^1 = H(1) - H(0) = e$$

donc

$$\boxed{\int_0^1 (x+1)e^x dx = e}$$

2 - A l'aide d'une intégration par partie, Calculons $\int_0^1 (x^2+2x-1)\mathbf{e}^x\mathbf{d}x$: **1 pt**

On pose : $\begin{cases} u(x) = x^2+2x-1 \\ u'(x) = 2x+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v'(x) = e^x \\ v(x) = e^x \end{cases}$

On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^2+2x-1)\,e^x dx &= \left[(x^2+2x-1)\,e^x\right]_0^1 - \int_0^1 (2x+2)e^x dx \\ &= (1^2+2-1)\,e^1 - (0^2+0-1)\,e^0 - 2\int_0^1 (x+1)e^x dx \\ &= 2e+1-2\int_0^1 (x+1)e^x dx \\ &= 2e+1-2e \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\int_0^1 (x^2+2x-1)\,e^x dx = 1}$

Yassine Elamri

Problème : (9 pts)

Partie I

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x$, et son tableau de variation ci-dessous :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

0,25 pt **1 -** Calculons $g(1)$:

On a : $g(1) = 1^3 - 1 - 2\ln^2 1 + 2\ln 1 = 0$

0,5 pt **2 -** Déterminons le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0;1]$ et $[1;+\infty[$:

D'après le tableau de variation de g; la fonction est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et comme on a $g(1) = 0$ alors on a :

$(\forall x \in]0;1]) \Longrightarrow \quad x \leq 1 \Longrightarrow g(x) \leq 0$, et $(\forall x \in [1;+\infty[) \Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow g(x) \geq 0$.

Partie II

f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$

0,5 pt **1 - a)** Vérifions que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$\left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0\right)$

b) Montrons que la droite (D) d'équation $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au

0,5 pt voisinage $+\infty$:

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = 0$ D'où la droite (D) d'équation : $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0,25 pt **c)** Déterminons la position relative de la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C})$:

Étudions le signe de $f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)$:

$$f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) > 0 \quad (\forall x \in]0;+\infty[)$$

Yassine Elamri

On en déduit que la courbe(C) est au-dessus de la droite (D) sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt **2 -** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interprétons le résultat géométriquement :

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty}$

$\left(\text{Car : } \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2x^2} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = +\infty \right)$

Interprétation géométrique :

La courbe(C) admet l'axe des ordonnées comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

1 pt **3 - a)** Montrons que $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$

On a : $(\forall x \in]0;+\infty[) \quad f'(x) = \left(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2x^2} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 \right)'$

$$= 1 - \frac{4x}{(2x^2)^2} + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)' \times \left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$= \frac{x^3}{x^3} - \frac{4}{4x^3} + 2\frac{\frac{1}{x}\times x - lnx}{x^2} \times \frac{lnx}{x}$$

$$= \frac{x^3 - 1}{x^3} + \frac{2(1-\ln x)\times \ln x}{x^3}$$

$$= \frac{x^3 - 1 - 2\ln^2 x + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

Donc : $\boxed{(\forall x \in]0;+\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}}$

0.5 pt **b)** Montrons que la fonction f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$.

D'après la question Partie I-2- on a :

- $(\forall x \in]0;1]) \quad g(x) \leq 0$ Donc : $f'(x) \leq 0$.
- $(\forall x \in [1;+\infty[) \quad g(x) \geq 0$ Donc $f'(x) \geq 0$.

D'où la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0,1]$ et croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

0.5 pt **c)** Dressons le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$ ↘	-1	↗	$+\infty$

Yassine Elamri

4 - Construisons de la courbe(C) et la droite (D). dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$(unité de mesure est 1 **cm**)

1 pt

Partie III

la fonction h définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

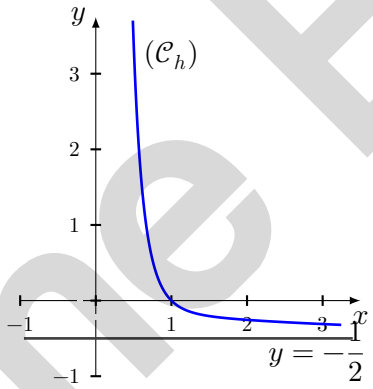
$$h(x) = f(x) - x$$

0,25 pt **1 - a)** Vérifions que $h(1) = 0$:

On a : $h(1) = f(1) - 1 = 0 \quad (f(1) = 1)$

0,75 pt **b)** Déterminons le signe de $h(x)$ sur chacun des intervalles $]0; 1]$ et $[1; +\infty[$, puis déduisons que $f(x) \leq x$ pour tout x de l'intervalle $[1; +\infty[$:

D'après le graphique ci-dessous (C_h) est la courbe de la fonction h.



- $h(x) \geq 0$ sur l' intervalle $]0, 1]$.
- $h(x) \leq 0$ sur l' intervalle $[1, +\infty[$.

On en déduit que pour tout x dans l'intervalle $[1, +\infty[$ on $a : f(x) \leq x$.

2 - La suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = e \\ U_{n+1} = f(U_n) \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

0,75 pt **a)** Montrons par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n.

- Initialisation : Pour $n = 0$ On $a : 1 \leq U_0 = e \leq e$ Donc la propriété est vraie pour est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité :

Soit $n \in IN$, Supposons que : $1 \leq U_n \leq$ e et montrons que : $0 \leq U_{n+1} \leq e$

Yassine Elamri

On $a : 1 \leq U_n \leq e$ et comme f est croissante sur $[1, +\infty[$ alors :

$$1 \leq U_n \leq e \Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \leq f(e)$$
$$\Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq f(e) \leq e \qquad (\forall x \in [1, +\infty[: f(x) \leq x$$

Donc : $0 \leq U_{n+1} \leq e$

b) Conclusion

On a montré par récurrence que $1 \leq U_n \leq e$ pour tout entier naturel n.

0.75 pt **c)** Montrons que la suite (u_n) est décroissante.

(D'après la question Partie III-1-b))on a : $h(x) \leq 0$ sur $[1, +\infty[$.

Et comme $1 \leq U_n \leq e$; alors : $h(U_n) \leq 0 \Leftrightarrow f(U_n) - U_n \leq 0$

Donc : $(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} \leq U_n$

D'où la suite (U_n) est décroissante.

0.75 pt **d)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente et déterminons sa limite .

La suite (U_n) est minorée par 1 et décroissante donc elle est convergente.

On a :

$$\begin{cases} f(U_n) = U_{n+1} \\ f([1;e]) \subset [1;e] \\ f \text{est continue sur} [1;e] \\ U_0 \in [1;e] \\ (U_n) \text{est convergente} \\ \text{si } \lim\limits_{n \to +\infty} U_n = l \text{ alors l est solution de l'équation } f(x) = x \Leftrightarrow h(x) = 0. \end{cases}$$

D'après le graphique de h, $x = 1$ est la seule solution d'où : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 1.}$

FIN

Yassine Elamri