ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2018

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3pts pts)

les points $A(0,-2,-2)$; $B(1,-2,-4)$ et $C(-3,-1,2)$.

1 pt

1 - Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ puis en déduisons que $2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) :

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$

Donc :

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&-3\\-2&4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&-3\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$
$$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

Donc : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC) donc on a :

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(ABC)\right)\ \overrightarrow{AM}\cdot(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y+2\\z+2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2(y+2)+(z+2)=0$$
$$\Leftrightarrow 2x+2y+z+6=0$$

0.5 pt

$2x+2y+z+6=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2 - Vérifions que la sphère (S) a pour centre $\Omega\,(1;0;1)$ et pour rayon $R=5$:
On sait que la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$

$$\left(\forall M\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in(S)\right)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-23=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+(y-0)^2+z^2-2z+1-25=0$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=25$$
$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=5^2$$

Donc (S) est la sphère de centre $\Omega(1;0;1)$ et de rayon $R=5$.

0.25 pt

3 - a) Vérifions que $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$, est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC) :
Soit (Δ) la droite qui passe par $\Omega(1,0,1)$ et qui est perpendiculaire au plan (ABC).
Alors $\forall M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (\Delta)$ on a $\overrightarrow{\Omega M}$ et $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ sont colinéaires ;
D'où :

$$(\exists t \in \mathbb{R}) / \overrightarrow{\Omega M} = t \times (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y = 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z-1 = t \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \qquad (t \in \mathbb{R}). \\ z = 1+t \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ)

0.5 pt

b) Déterminons les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) :
Les coordonnées du point H intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC)
Vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 2x+2y+z+6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 2(1+2t)+2(2t)+(1+t)+6 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ 9t+9 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2t \\ z = 1+t \\ t = -1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow H \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

0.è5 pt

Donc : $H(-1;-2;0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).

4 - Vérifions que $d(\Omega;(ABC)) = 3$, puis montrer que le plan (ABC) coupe la sphère (S) selon un cercle, de rayon 4, dont on déterminera le centre :

Yassine Elamri

On a :

$$\begin{aligned} d(\Omega;(ABC)) &= \frac{|2x_\Omega + 2y_\Omega + z_\Omega + 6|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|} \\ &= \frac{|2\times 1 + 2\times 0 + 1 + 6|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}} \\ &= \frac{9}{\sqrt{9}} \\ &= 3 < 5 \end{aligned}$$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle dont le centre est la projection orthogonale de Ω sur le plan (ABC) or ce point est l'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC) donc c'est le point $H(-1;-2;0)$ et le rayon du cercle est : $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{25-9} = 4$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt

1 - Résoudrons, dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $2z^2 + 2z + 5 = 0$:
Le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 40 = -36$
On a $\Delta < 0$ donc l'équation admet deux solutions complexes :

$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2\times 2} = \frac{-1-3i}{2}$$
$$z_1 = \frac{-2 - i\sqrt{36}}{2\times 2} = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \quad \text{et } z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

D'où $S = \left\{\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right); \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)\right\}$

0.25 pt

2 - R la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$

a) Écrivons, sous la forme trigonométrique, le nombre complexe $d = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:
On a :

$$\begin{aligned} d &= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

0.5 pt

Donc : $d = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$

b) Montrons que $b = da$:
Soit $A\left(a = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\right)$
On a :

$$\begin{aligned} B = R(A) &\Leftrightarrow b = a \times e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow b = a \times \left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow b = a \times d \end{aligned}$$

3 - t la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Yassine Elamri

T r than yesterday, tomorrow better than today

0.75 pt

a) Vérifions que $c = b + a$, puis en déduire que $c = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$:

On a :

$$\begin{aligned} C = t(B) &\Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \\ &\Leftrightarrow c = b + a \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} c = b + a &\Leftrightarrow c = d \times a + a \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot (d + 1) \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \\ &\Leftrightarrow c = a \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{aligned}$$

0.75 pt

b) Déterminons $\arg\left(\frac{c}{a}\right)$ puis en déduisons que le triangle OAC est équilatéral :

On a :

$$\begin{aligned} c = a \cdot \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{cases} \frac{c}{a} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ \arg\left(\frac{c}{a}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{c}{a}\right| = 1 \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OC = OA \\ (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

On conclut que le triangle OAC est équilatéral.

Exercice 3 : (3 pts)

1.5 pt

On tire simultanément 3 boules de la caisse : $\text{Card}\,\Omega = C_9^3 = 84$

1 - Montrons que : $p(A) = \frac{1}{6}$, $p(B) = \frac{1}{4}$ et $p(C) = \frac{1}{42}$:

■ A « Les trois boules tirés sont de même couleur »

On a :

$$\begin{aligned} \text{Card}\,A = C_5^3 + C_4^3 = 10 + 4 = 14 \\ P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{14}{84} = \frac{1}{6} \\ \text{Donc} : P(A) = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

■ B « Les trois boules tirés portent le même numéros »

On a :

$$\begin{aligned} \text{Card}\,B = C_3^3 + C_6^3 = 21 \\ P(B) = \frac{\text{CardB}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{21}{84} = \frac{1}{4} \\ \text{Donc} : P(B) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Yassine Elamri

■ C « Les trois boules tirés sont de même couleur et portent le même numéros »
On a :

$$\text{CardC} = C_3^3 + C_3^3 = 2$$
$$P(C) = \frac{\text{CardC}}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{2}{84} = \frac{1}{42}$$
$$\text{Donc : } P(C) = \frac{1}{42}$$

0.5 pt

2 - X la variable aléatoire liée à « Nombre de fois que l'événement A est réalisé »

a) Déterminons les paramètres de la variable aléatoire X :
Les paramètres de la variable aléatoire X sont :

- $n = 3$ (nombre de fois qu'on répète l'expérience)
- $p = P(A) = \frac{1}{6}$ (la probabilité de l'événement A)

1 pt

b) Montrons que : $p\,(X = 1) = \frac{25}{72}$ et calculons $p\,(X = 2)$:

$$\begin{aligned} P(X=1) &= C_n^1 \times p^1 \times (1-p)^{n-1} \\ &= n \times p \times (1-p)^{n-1} \\ &= 3 \times \frac{1}{6} \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-1} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= \frac{25}{72} \end{aligned}$$

Donc : $P(X = 1) = \frac{25}{72}$

$$\begin{aligned} P(X=2) &= C_n^2 \times p^2 \times (1-p)^{n-2} \\ &= C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^{n-2} \\ &= 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{3-2} \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{72} \end{aligned}$$

Donc : $P(X = 2) = \frac{5}{72}$

Problème : (11 pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x - x^2 + 3x - 1$
Le tableau ci-dessous est le tableau de variations de la fonction g

Yassine Elamri

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

0.25 pt

0.5 pt

1 - Vérifions que $g(0)=0$: On a : $g(0)=e^0-0^2+3\times 0-1=1-1=0$

2 - Déterminons le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ et $[0;+\infty[$:
D'après le tableau de variation de g ; la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et comme on a $g(0)=0$ alors on a : $(\forall x\in]-\infty;0])\quad g(x)\leq 0\quad$ et $\quad(\forall x\in[0;+\infty[)\quad g(x)\geq 0$

Partie II

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x^2-x)\mathrm{e}^{-x}+x$
Et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$(unité : $1cm$)

0.5 pt

1 - a) Vérifions que $f(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+x$, pour tout x de $\mathbb{R}$, puis montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

- Vérifions que $f(x)=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}-\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}+x$:

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x=\frac{x^2-x}{e^x}+x$$
$$=(x^2-x)\,e^{-x}+x$$
$$=f(x)$$

- Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x\right)$$
$$=+\infty\quad\left(\text{car : }\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{\frac{x^n}{e^x}}=0\quad(n\in\mathbb{N})\right)$$

0.75 pt

b) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$, puis en déduisons que la courbe (C) admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ d'équation $y=x$:
On a :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}+x-x\right)$$
$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-\frac{x}{e^x}\right)$$
$$=0$$

On en déduit que $(\mathcal{C}_f)$ admet la droite (D) d'équation $y=x$ comme asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt

c) Vérifions que $f(x)=\dfrac{x^2-x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$, pour tout x de $\mathbb{R}$, puis calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$:

- Vérifions que $f(x)=\dfrac{x^2-x+x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}$:

$$(\forall x\in\mathbb{R})\quad \frac{x^2-x+xe^x}{e^x}=\frac{x^2-x}{e^x}+\frac{xe^x}{e^x}$$
$$=(x^2-x)\,e^{-x}+x$$
$$=f(x)$$

Yassine Elamri

- Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = \lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x^2-x+xe^x}{e^x}\right)$$
$$= +\infty \quad \left(\text{Car : } \lim_{x\mapsto-\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{1}{e^x}\right) = +\infty\right)$$

0.5 pt

d) Montrons que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, puis interprétons géométriquement le résultat :
On a :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\mapsto-\infty}\left(\left(\frac{x^2-x}{x}\right)e^{-x}+1\right)$$
$$= -\infty$$
$$\left(\text{Car : } \lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x^2-x}{x}\right) = -\infty \text{ et } \lim_{x\mapsto-\infty} e^{-x} = +\infty\right)$$

Interpréter géométriquement :

0.25 pt

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

2 - a) Vérifions que $f(x)-x$ et x^2-x ont le même signe pour tout x de $\mathbb{R}$:
On a : $(\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)-x = (x^2-x)\,e^{-x}$

0.5 pt

Comme $(x\in\mathbb{R})e^{-x}>0$; Alors $f(x)-x$ et (x^2-x) ont le même signe sur $\mathbb{R}$.

b) Déduions que (C) est au-dessus de (D) sur chacun des intervalles $]-\infty;0]$ *et* $[1;+\infty[$, et en dessous de (D) sur l'intervalle $[0;1]$:

- On a : $(\forall x\in]-\infty;0]\cup[1;+\infty[) \quad x^2-x\geq 0 \implies f(x)-x\geq 0$
  Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite (D) sur $]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.
- $(\forall x\in[0;1]) \quad x^2-x\leq 0 \implies f(x)-x\leq 0$
  Donc $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de la droite (D) sur $[0;1]$.

0.75 pt

3 - a) Montrons que $f'(x) = g(x)\mathrm{e}^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$:
On a :

$$(\forall x\in\mathbb{R}) \quad f'(x) = \left((x^2-x)\,e^{-x}+x\right)'$$
$$= (x^2-x)'\,e^{-x} + (x^2-x)\,(e^{-x})' + 1$$
$$= (2x-1)e^{-x} - (x^2-x)\,e^{-x} + 1$$
$$= (3x-x^2-1)\,e^{-x} + e^{-x}\times e^{x}$$
$$= (e^{x}-x^2+3x-1)\,e^{-x}$$
$$= g(x)\cdot e^{-x}$$

Donc : $(\forall x\in\mathbb{R}) \quad f'(x) = g(x)\cdot e^{-x}$

0.5 pt

b) En déduisons que la fonction f est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$:
D'après la question $I-2)$ on a : $(\forall x\in]-\infty;0])\quad g(x)\leq 0$ et $(\forall x\in[0;+\infty[) \quad g(x)\geq 0$
On en déduit que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;0]$ et croissante sur l'intervalle $[0;+\infty[$.

0.25 pt

c) Dressons le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Yassine Elamri

0.25 pt

4 - a) Vérifions que $f''(x) = (x^2 - 5x + 4)e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$:
On a pour tout x dans $\mathbb{R}$:

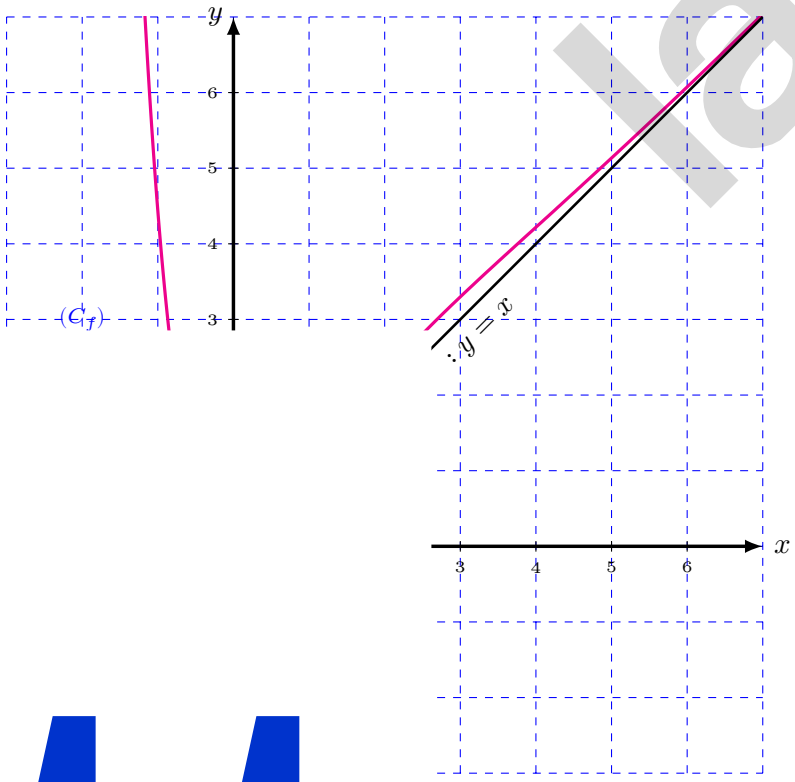
$$\begin{aligned} f''(x) &= (g(x) \cdot e^{-x})' \\ &= g'(x) \cdot e^{-x} - g(x) \cdot e^{-x} \\ &= (e^x - 2x + 3)\, e^{-x} - (e^x - x^2 + 3x - 1)\, e^{-x} \\ &= (x^2 - 5x + 4)\, e^{-x} \end{aligned}$$

0.5 pt

b) Déduisons que la courbe (C) admet deux points d'inflexion d'abscisses successives 1 et 4 :
On a : $(x^2 - 5x + 4) = (x-1)(x-4)$, donc $f''(x)$ s'annule et change le signe pour $x = 1$ et $x = 4$ alors les points d'abscisse respectifs 1 et 4 sont deux points d'inflexion de la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

1 pt

5 - Construction graphique de $(\mathcal{C}_f)$ et (D) dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$.



https
lamri

https://steinmath.com
Today better than yesterday, tomorrow better tha

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2e^{-x}dx &= -[H(x)]_0^1\\ &= -(H(1)-H(0))\\ &= -5e^{-1}+2\\ &= \frac{2e-5}{e}\end{aligned}$$

0.75 pt

b) À l'aide d'une intégration par parties, montrons que $\int_0^1 xe^{-x}\mathrm{d} = \frac{e-2}{e}$:

On pose :

$$\begin{cases}u(x)=x\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}u'(x)=1\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{-x}dx &= [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 (u'(x)v(x))\,dx\\ &= [-xe^{-x}]_0^1 - \int_0^1 (1\times(-e^{-x}\\ &= -e^{-1} - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx\\ &= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1\\ &= -e^{-1} - (e^{-1}-1)\\ &= 1-2e^{-1}\\ &= \frac{e-2}{e}\end{aligned}$$

D'où : $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

0.75 pt

c) Calculons, en cm^2, l'aire du domaine plan limité par (C) et (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$:

Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan délimitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ la droite (D) et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

$$A = \int_0^1 |f(x)-x|dx \quad \text{(u.a)}$$

On sait que d'après ce qui précède $f(x)-x\leq 0$ sur $[0\,;1]$

Donc :

$$\begin{aligned}A &= \int_0^1 (x-f(x))dx \text{ (u.)}\\ &= \int_0^1 (x-x^2)\,e^{-x}dx \quad \text{(u.)}\\ &= \int_0^1 xe^{-x}dx - \int_0^1 x^2e^{-x}dx \quad \text{(u.a)}\\ &= \left(\frac{e-2}{e}-\frac{2e-5}{e}\right)\ \mathrm{cm}^2\\ &= \frac{3-e}{e}\ \mathrm{cm}^2\end{aligned}$$

Yassine Elamri

Partie III

la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

0.75 pt

1 - Montrons par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n :

Initialisation

Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $0 \leq \dfrac{1}{2} \leq 1$ alors $0 \leq u_0 \leq 1$ donc la proposition est vraie.

Hérédité

Pour $n \in \mathbb{N}$ on suppose que : $0 \leq u_n \leq 1$.

Et montrons que : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

On a :

$$\begin{aligned} 0 \leq u_n \leq 1 &\Longrightarrow f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \quad \text{et comme } f \text{ est croissante sur } [0\,;1] \\ &\Longrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1 \end{aligned}$$

D'où d'après le principe de récurrence, on a $0 \leq u_n \leq 1$ pour tout entier naturel n.

0.5 pt

(On utilise le résultat de la question $II - 3 - b$))

2 - Montrons que la suite (U_n) est décroissante :

D'aprés le résultat de la question $II - 2 - b$) on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0;1] \quad f(x) - x \leq 0 &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad f(u_n) - u_n \leq 0 \quad (\text{ Car } u_n \in [0;1]) \\ &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0 \\ &\Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} \leq u_n \end{aligned}$$

0.75 pt

Donc la suite (u_n) est décroissante

3 - En déduisons que (U_n) est convergente et déterminons sa limite :

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc convergente.

Soit ℓ sa limite. On a :

$$\begin{cases} f(u_n) = u_{n+1} \\ f([0;1]) \subset [0;1] \\ f \text{ est continue sur } [0;1] \\ u_0 \in [0;1] \\ (u_n) \text{ est convergente} \end{cases}$$

Alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

la question $II - 2 - b$) on a : $f(x) = x$ pour les valeurs $x = 0$ et $x = 1$;

Or la suite (u_n) est décroissante et $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc : $\ell \leq \dfrac{1}{2}$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$

Yassine Elamri