ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2017

MATHÉMATIQUES

le plan d'équation

$-2z-1=0$

$C)$

ercle (C)

(C) (La

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan

http
https://steinmath.c
Today better than yesterday, tomorrow better than t

0.25 **a) Montrons que : $\overrightarrow{u}(0,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)**

On a (P) le plan d'équation $y-z=0$ donc $\overrightarrow{u}(0,1,-1)$ est un vecteur normal au plan (P)

Et puisque $(P)\perp(\Delta)$ donc, $\boxed{\overrightarrow{u}(0,1,-1) \text{ est un vecteur directeur de la droite } (\Delta)}$

0.75 **b) Montrons que : $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{2}\left\|\overrightarrow{u}\right\|$ et déduisons que la droite (Δ) coupe la sphère (S) en deux points :**

✓ On a :$\overrightarrow{\Omega A}(0;-3;1)$ et $\overrightarrow{u}(0;1;-1)$

D'où : $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k} = 2\vec{i}$

par conséquence : $\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = 2$

D'autre part : $\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

D'où : $\boxed{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{2}\left\|\overrightarrow{u}\right\|}$

✓ On a : $d(\Omega,(\Delta)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|} = \sqrt{2}$

Donc $d(\Omega,(\Delta)) < R$, par suite $\boxed{\text{la droite } (\Delta) \text{ coupe la sphère } (S) \text{ en deux points}}$

c) Déterminons les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S)

0.5 On a : $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2+t \\ z = 2-t \end{cases}$; $(t\in\mathbb{R})$, est une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par le point $A(1,-2,2)$ et orthogonale au plan (P)

Soit $M(x,y,z)$ un point appartient a l'intersection de (Δ) et (S),Alors :

$$M(x,y,z)\in(\Delta)\bigcap(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2+t \\ z = 2-t \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 2^2 \end{cases}$$

Après le remplacement en trouve l'équation $t^2-4t+3=0$, donc $\Delta=4$ et par suite $t_1=1$ ou $t_2=3$

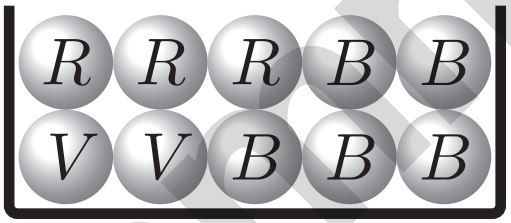
Donc pour $t_1=1$: $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2+1=-1 \\ z = 2-1=1 \end{cases}$

Yassine Elamri

Et pour $t_2 = 3$: $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 \\ y &= -2+3 = 1 \\ z &= 2-3 = -1 \end{cases}$

Finalement, les point d'intersection de la droite (Δ) et de la sphère (S) sont : $\boxed{M(1,-1,1) \text{ . et } N(1,1,-1)}$

Exercice 2 : (3 pts)



On considère l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

On considère les événements suivants :

Dans cette exercice, on va utiliser les combinaisons C_n^p

1 - A : "Parmi les quatre boules tirées, une seule boule est verte"

1.5 B : "Parmi les quatre boules tirées, il y a exactement trois boules de même couleur"

Montrons que $P(A) = \frac{8}{15}$ et $P(B) = \frac{19}{70}$:

On a $card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$

$Card(A) = C_2^1 \times C_8^3 = 2 \times 56 = 112$ (Car $A =$ "$V\bar{V}\bar{V}\bar{V}$")

Donc $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$, Alors $\boxed{P(A) = \frac{8}{15}}$

$Card(B) = C_3^3 \times C_7^1 + C_5^3 \times C_5^1 = 1 \times 7 + 10 \times 5 = 57$ (Car $B =$ "$RRR\bar{R}$" Ou "$BBB\bar{B}$"),

Donc $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{57}{210} = \frac{19}{70}$, Alors $\boxed{P(B) = \frac{19}{70}}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.5 **a) Montrons que $P(X=2) = \frac{2}{15}$**

L'événement $(X=2)$ correspond à tirer deux boule vertes et deux boule non vertes

Donc $P(X=2) = \frac{card(X=2)}{card(\Omega)} = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{1 \times 28}{210} = \frac{2}{15}$, par suite $\boxed{P(X=2) = \frac{2}{15}}$

1 **b) Donnons la loi de probabilité de X et montrons que l'espérance $E(X) = \frac{4}{5}$**

On a $X(\Omega) = \{0;1;2\}$

L'événement $(X=0)$ correspond à tirer quatre boule non vertes.$\{X=0\} =$ "$\bar{V}\bar{V}\bar{V}\bar{V}$"

L'événement $(X=1)$ correspond à tirer une seule boule verte.

Donc $\{X=1\} = A =$ "$V\bar{V}\bar{V}\bar{V}$". Alors $P(X=1) = P(A) = \frac{C_8^4}{210} = \frac{8}{15}$

Today bett https://steinmath.com tomorrow better than today
Yassine Elamri

D'après la question précédent : $P(X=2)=\dfrac{2}{15}$

D'où la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

X_i	0	1	2
$P(X=X_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

✓ **L'espérance mathématique :** $E(X)=\left(0\times\dfrac{1}{3}\right)+\left(1\times\dfrac{8}{15}\right)+\left(2\times\dfrac{2}{15}\right)$

Donc $\boxed{E(X)=\dfrac{4}{5}}$

Exercice 3 : (3 pts)

1 - Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2+4z+8=0$

On a : $\Delta=4^2-4\times8=-16<0$

0.75 Donc l'équation admet deux solution complexes :

$z_1=\dfrac{-4-i\sqrt{16}}{2\times1}=\dfrac{-4-4i}{2}=-2-2i$ et $z_2=\dfrac{-4+i\sqrt{16}}{2\times1}=\dfrac{-4+4i}{2}=-2+2i$

Alors $S=\{-2-2i;-2+2i\}$.

2 - Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soient les points $A(a=-2+2i)$, $B(b=4-4i)$, $C(c=4+8i)$

a) Soit R la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M' d'affixe z'

0.5 ✓ **Montrons que** $z'=-iz-4$

On a $R(M)=M'\Leftrightarrow z'-a=\mathbf{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(z-a)\Leftrightarrow z'-(-2+2i)=-i\left(z-(-2+2i)\right)$

$\Leftrightarrow z'=-iz-2i-2-2+2i\Leftrightarrow z'=-iz-4$

D'où fbox$z'=-iz-4$

0.75 ✓ **Vérifions que** $R(C)=B$ **et Déduisons la nature du triangle** ABC

On a $z'=-iz-4$

$-ic-4=-i(4+8i)-4=-4i+8-4=4-4i=b$, Donc $\boxed{R(C)=B}$

✓ On a : $R(C)=B$, donc $\begin{cases} AC & = & AB \\ \left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right) & = & -\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

Alors $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est un triangle rectangle isocèle au point } A}$

3 - Soit ω l'affixe du point Ω, milieu du segment $[BC]$

Yassine Elamri

a) Montrons que : $|c-\omega|=6$

0.5 On a $\omega=\dfrac{b+c}{2}=\dfrac{4-4i+4+8i}{2}=\dfrac{8+4i}{2}=4+2i$

Donc $|c-\omega|=|\,(4+8i)-(4+2i)\,|=|6i|=6$

b) Montrons que l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|c-\omega|=6$ est le cercle circonscrit au triangle ABC

0.5 On a $|c-\omega|=6\equiv \Omega M=6$, donc l'ensemble des points M est le cercle de centre Ω et de rayon 6

Or Ω le milieu du segment $[BC]$, alors $\Omega C=\Omega B=6$

D'autre part, $|a-\omega|=|-2+2i-4-2i|=|-6|=6\equiv \Omega A=\Omega B=\Omega C=6$

Finalement, L'ensemble des points M est le cercle circonscrit au triangle ABC

Exercice 4 : (2.5 pts)

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0=17$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{4}u_n+12$, pour tout $n\in\mathbb{N}$

0.5 **1 - a) Montrons par récurrence que, $u_n>16$ pour tout n de $\mathbb{N}$**

✓ Pour $n=0$ on a $u_0=17$ donc $u_0>16$

Donc la propriété vrai pour $n=0$.

✓ Soit $n\in\mathbb{N}$, Supposons que $u_n>16$ et on montre que $u_{n+1}>16$

On a $u_n>16\Rightarrow \dfrac{1}{4}u_n>4$

$\Rightarrow \dfrac{1}{4}u_n+12>16$

$\Rightarrow u_{n+1}>16$

Donc d'après le principe de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}\quad u_n>16$

b) Montrons que (u_n) est décroissante et convergente

0.5 On a $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{4}u_n+12-u_n=\left(\dfrac{1}{4}-1\right)u_n+12=-\dfrac{3}{4}u_n+12=-\dfrac{3}{4}(u_n-16)$

Et d'après la question $(1-a)$

on a $u_n>16\Leftrightarrow u_n-16>0\Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}(u_n-16)<0$

Alors $u_{n+1}-u_n<0$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où (u_n) est une suite décroissante

✓ La suite (u_n) est décroissante et minorée par 16

Alors : la suite (u_n) est convergente

2 - Soit (v_n) la suite numérique telle que $v_n=u_n-16$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Yassine Elamri

a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique

0.5

On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 16 = \frac{1}{4}u_n + 12 - 16 = \frac{1}{4}u_n - 4 = \frac{1}{4}(u_n - 16) = \frac{1}{4}v_n$

Alors $v_{n+1} = \frac{1}{4}v_n$, Finalement $\boxed{(v_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{1}{4}}$ et son premiere terme $v_0 = u_0 - 16 = 17 - 16 = 1$

b) Montrons que $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$ et déterminons $\lim u_n$

0.5

Pour tout n de $\mathbb{N}$, On a : $v_n = v_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$

D'autre part $v_n = u_n - 16 \Leftrightarrow u_n = v_n + 16 \Leftrightarrow \boxed{u_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

c) Déterminons la plus petite valeur de l'entier naturel n tel que $u_n < 16,0001$

0.5

$u_n < 16,0001 \Leftrightarrow 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0,0001$

$\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) < \ln(0,0001)$

$\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{4}\right) < \ln(0,0001) \Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,0001)}{\ln\left(\frac{1}{4}\right)}$ Car $\ln(\frac{1}{4}) < 0$

Donc la plus petite valeur de l'entier naturel n pour laquelle $u_n < 16,0001$ est : $\boxed{n = 7}$

Problème : (8.5 pts)

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$

Et $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - Vérifions que $g(0) = 0$:

0.25

On a : $g(0) = 1 - (0+1)^2 e^0 = 1 - 1 \times 1 = \boxed{0}$

2 - Graphiquement :

1

✓ Sur l'intervalle $]-\infty; 0]$; On a $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessus de l'axe des abscisses

Alors : $\forall x \in]-\infty; 0]$, $g(x) \geq 0$

✓ Sur l'intervalle $[0; +\infty[$; On a $(\mathcal{C}_g)$ est au-dessous de l'axe des abscisses

Alors : $\forall x \in [0; +\infty[$, $g(x) \leq 0$

Partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x$

Et $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(unité : 2 cm)

1 - a) Vérifions que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$, déduisons que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

0.75

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1 - (x^2+1)e^x = x + 1 - x^2e^x - e^x$

$$= x + 1 - 4 \times \frac{x^2}{4}\left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$$

$$= x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x}$

Yassine Elamri

✓ On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x = \boxed{-\infty}$, Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

b) Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)]$ et déduisons l'interprétation graphique

0.5

➠ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty} x+1-4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x-(x+1)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} -4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2-e^x = 0$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \end{cases}$

➠Puisque $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x+1)] = 0$.

Alors $\boxed{\text{la droite } (D) \text{ d'équation } y = x+1 \text{ est asymptote à } (Cf) \text{ au voisinage de } -\infty}$

c) Montrons que la courbe (C_f) est en dessous de la droite (D)

0.25

On a : $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x) = x+1-(x^2+1)e^x \Leftrightarrow f(x)-(x+1) = -(x^2+1)e^x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R};\ f(x)-(x+1) < 0$

Alors $\boxed{\text{la courbe } (C_f) \text{ est en dessous de la droite } (D)}$

2 - a) Montrons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

0.5

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left[1+\frac{1}{x}-(x+\frac{1}{x}e^x)\right] = -\infty$ Car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+\frac{1}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

b) Montrons que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique

0.25

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x}-(x+\frac{1}{x})e^x = -\infty$

$\boxed{(C_f) \text{ admet au voisinage de } +\infty, \text{ une branche parabolique de direction } (\textbf{\textit{l'axe des ordonnées}}).}$

3 - a) Montrons que $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

0.75

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \left(x+1-(x^2+1)e^x\right)'$

$= 1-\left((x^2+1)'e^x+(x^2+1)(e^x)'\right) = 1-(2xe^x+(x^2+1)e^x)$

$= 1-\left(x^2+2x+1\right)e^x = 1-(x+1))^2e^x = g(x)$

En fin $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) Montrons que f est croissante sur $]-\infty;0]$ et décroissante sur $[0;+\infty[$ et dressons le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$

0.75

D'après la question précédent, on a $f'(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

✓ Sur l'intervalle $]-\infty;0]$; On a $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x) \geq 0$, donc f croissante

✓ Sur l'intervalle $[0;+\infty[$; On a $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq 0$, donc f décroissante

Yassine Elamri

➠ **Dressons le tableau de variations de f**

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$+\infty$

c) Montrons que (C_f) admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1

0.75

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$, Et on a :

$$f''(x) = \left(f'(x)\right)' = g'(x) = \left(1-(x+1)^2e^x\right)' = -\left((x+1)^2\right)' e^x + (x+1)^2\left(e^x\right)'\Big)$$

$$= -(2(x+1)e^x + (x^2+2x+1)e^x) = -(x+1)(x+3)e^x$$

Le signe de $f''(x)$ est celui de $-(x+1)(x+3)$ $(e^x > 0)$, Donc

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$f"(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

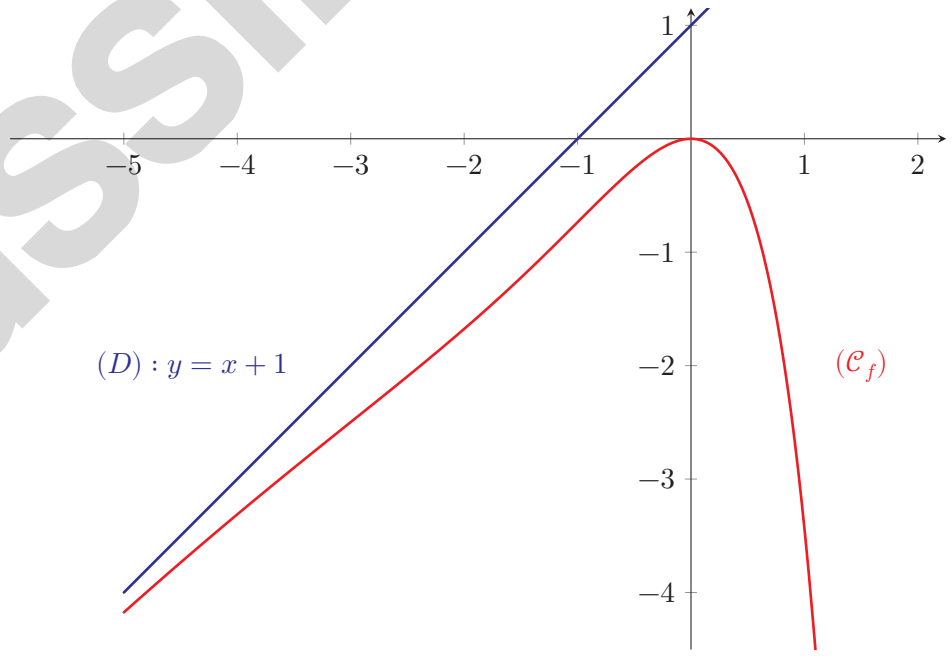
La fonction f'' s'annule et change de signe en -3 et -1

Donc la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1

1

4 - Construisons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

(On prend : $f(-3) \simeq -2.5$; $f(-1) \simeq -0.75$)



0.5

5 - a) Vérifions que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction

Yassine Elamri

$h : x \mapsto xe^x$ **sur** $\mathbb{R}$ **et montrons que** $\int_{-1}^{0} xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

✓ Les deux fonctions $x \mapsto x - 1$ et $x \mapsto e^x$ sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$

Alors H est dérivable sur $\mathbb{R}$, Et pour tout x de $\mathbb{R}$ on a :

$H'(x) = ((x-1)e^x)' = (x-1)'e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = h(x)$

D'où $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$

✓ $\int_{-1}^{0} xe^x dx = [(x-1)e^x]_{-1}^{0} = -1 - (-2e^{-1}) = \frac{2}{e} - 1$

0.75 **b) En utilisant une intégration par parties, montrons que :**

$I = \int_{-1}^{0} (x^2+1)\, e^x \mathbf{d}x = 3(1 - \frac{2}{e})$

On pose $u(x) = x^2 + 1$ *et* $v'(x) = e^x$

Donc $u'(x) = 2x$ *et* $v(x) = e^x$

$I = [(x^2+1)\, e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2xe^x dx$

$= 1 - 2e^{-1} - 2\int_{-1}^{0} (xe^x)\, dx$

$= 1 - \frac{2}{e} - \frac{4}{e} + 2$

$= 3(1 - \frac{2}{e})$

Finalement $\int_{-1}^{0} (x^2+1)\, e^x \mathbf{d}x = 3\left(1 - \frac{2}{e}\right)$

0.5 **c) Calculons, en** cm^2**, l'aire du domaine plan limité par la courbe** $(\mathcal{C}_f)$**, la droite** (D)**, l'axe des ordonnées et la droite d'équation** $x = -1$

On a $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} |f(x) - (x+1)|\, dx\ u.a$ (Avec f continue et la courbes (C_f) situés au-dessous de la droite $(D) : y = x + 1$

Donc $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} ((x+1) - f(x))\, dx \times 2cm \times 2cm$

$= \int_{-1}^{0} (x^2+1)\, e^x dx \times 4cm^2$

$= 3\left(1 - \frac{2}{e}\right) \times 4cm^2 = 12\left(1 - \frac{2}{e}\right) cm^2$

Finalement $\mathcal{A} = 12\left(1 - \frac{2}{e}\right) cm^2$

FIN

Yassine Elamri