ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences & Technologie

## Session : Rattrapage 2016

## MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

## Exercice 1 : (3 pts)

**1 -** On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ pour tout entier naturel $n$

**0.5 pt** **a)** **Montrons par récurrence que $u_n > 1$ pour tout entier naturel $n$.**

✔ **Initialisation :** Pour $n = 0$, on a $u_0 = 2$ donc $u_0 > 1$.

✔ **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose que : $u_n > 1$ et on montre que $u_{n+1} > 1$.

On a :

$$\begin{aligned} u_n > 1 &\Rightarrow \frac{1}{16}u_n > \frac{1}{16} \\ &\Rightarrow \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} > \frac{1}{16} + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

D'où $u_{n+1} > 1$.

✔ **Conclusion :** d'après le principe de la récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$.

**0.5 pt** **b)** ✔ **Vérifions que $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}\left(u_n - 1\right)$ pour tout entier naturel $n$.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16} - u_n \\ &= \left(\frac{1}{16} - 1\right)u_n + \frac{15}{16} \\ &= \frac{-15}{16}u_n + \frac{15}{16} \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-15}{16}\left(u_n - 1\right)}$.



T than yesterday, tomorrow better than today

✔ **Montrons que la suite $(u_n)$ est décroissante.**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_n > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n - 1 > 0 \quad \Rightarrow \dfrac{-12}{16}\left(u_n - 1\right) < 0 \quad \Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0.$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} < u_n$. Et par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

0.25 pt **c) Déduisons q**

Puisque la sui

elle est conve

**2 -** Soit $(v_n)$ la suite

1 pt **a)** ✔ **Montron**

Soit $n \in \mathbb{N}$. O

Donc $\boxed{(\forall n \in}$

Et par conséq

✔ **Écrivons**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

terme $v_0 = u_0$

0.75 pt **b)** ✔ **Montron**

Soit $n \in \mathbb{N}$. O

Et puisque $v_n$

✔ **Détermi**

On a $-1 < \dfrac{1}{16} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n = 0$. Or $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 1 + \left(\dfrac{1}{16}\right)^n$.

Alors $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$.

## Exercice 2 : (3 pts)

**1 -** Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,3,4)$ et $B(0,1,2)$.

0.5 pt **a) Montrons que $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.**

On a $\overrightarrow{OA}(1;3;4)$, $\overrightarrow{OB}(0;1;2)$.

Donc $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$. D'où $\boxed{\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}}$



https://stemmath.com tter than yesterday, tomorrow better than today

0.5 pt **b) Montrons que $2x - 2y + z = 0$ est une équation cartésienne du plan $(OAB)$.**

On sait que le vecteur $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ est un vecteur normal au plan $(OAB)$.

Alors $(OAB)$ : $2x - 2y + z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Or O $\in (OA$

Et par conséq

0.5 pt **2 - Montrons que**

Soit $M(x, y, z)$ u

$M \in (S)) \iff$

$\iff$

$\iff$

D'où $(S)$ est la s

0.75 pt **3 - a) Montrons q**

On a :

Donc $d(\Omega; (O$

0.75 pt **b) Déterminon sphère** $(S)$.

Pour détermi

trique de la d

On a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{O}$

de $(\Delta)$.

Donc $(\Delta)$ : $\begin{cases} y = -3 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 + t \end{cases}$ $(S)$ $(OAB)$

système : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 - 2t \\ z = 3 + t \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$ . On remplace $x$, $y$ et $z$ dans la 4 ème équation, on trouve :

$6 + 4t + 6 + 4t + 3 + t = 0 \Rightarrow 9t + 16 = 0 \Rightarrow t = \dfrac{-16}{9} = \dfrac{-5}{9}$

Donc $\begin{cases} x = 3 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{-1}{3} \\ y = -3 + \dfrac{10}{3} = \dfrac{1}{3} \\ z = 3 - \dfrac{5}{3} = \dfrac{4}{3} \end{cases}$ . Et par conséquent : $\boxed{H\left(\dfrac{-1}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{4}{3}\right)}$.



https://stelmath.com tter than yesterday, tomorrow better than today

## Exercice 3 : (3 pts)

**0.75 pt** **1 - Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2-8z+41=0$.**

On a $\Delta=(-8)^2-4\times 41=64-164=-100=(10i)^2$. Donc $z_1=\dfrac{8+10i}{2}=4+5i$ et $z_2=\overline{z_1}=4-5i$. D'où $\boxed{S=\{4+5i;4-5i\}}$.

**2 -** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points $A,B,C$ et $\Omega$ d'affixes respectives $a,b,c$ et $\omega$ telles que $a=4+5i$, $b=3+4i$, $c=6+7i$ et $\omega=4+7i$.

**0.75 pt** **a) Calculons $\dfrac{c-b}{a-b}$, puis déduisons que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.**

puis en déduire que les points $A,B$ et $C$ sont alignés.

On a : $\dfrac{c-b}{a-b}=\dfrac{6+7i-3-4i}{4+5i-3-4i}=\dfrac{3+3i}{1+i}=\dfrac{3(1+i)}{1+i}$. Donc $\boxed{\dfrac{c-b}{a-b}=3}$

Et puisque $\dfrac{c-b}{a-b}=3\in$, alors les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

**0.75 pt** **b) Montrons que $z'=-iz-3+11i$.**

Soit $z$ l'affixe d'un point $M$ du plan et $z'$ l'affixe du point $M'$.

Puisque $R$ est la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$. Alors :

$$\begin{aligned} R(M)=M' &\iff z'-\omega=e^{-i\frac{\pi}{2}}(z-\omega)\\ &\iff z'=4+7i-i(z-4-7i)\\ &\iff z'=4+7i-iz+4i-7\end{aligned}$$

D'où $\boxed{z'=-iz-3+11i}$

**0.75 pt** **c) Déterminons l'image du point $C$ par la rotation $R$ puis donnons une forme trigonométrique du nombre complexe $\dfrac{a-\omega}{c-\omega}$..**

• On a

$$\begin{aligned} c' &= -ic-3+11i\\ &= -i(6+7i)-3+11i\\ &= -6i+7-3+11i\\ &= 4+5i=a\end{aligned}$$

Donc $\boxed{R(C)=A}$

• On a :

$$\begin{aligned} \frac{a-\omega}{c-\omega}&=\frac{4+5i-4-7i}{6+7i-4-7i}=\frac{-2i}{2}=-i\\ &=0-1i\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\dfrac{a-\omega}{c-\omega}=\cos\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}\right)}$

Yassine Elamri

## Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules portant les nombres $1; 2; 2; 3; 3; 3; 4; 4; 4; 4$ (Les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante : on tire au hasard , successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

**1 pt** **1 -** Soit $A$ l'évènement :" Obtenir deux boules portant deux nombres pairs". **Montrons que** $p(A) = \frac{1}{3}$.

On a $card(\Omega) = A_{10}^2 = \frac{10!}{8!} = 10 \times 9 = \boxed{90}$. Donc $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{A_6^2}{90} = \frac{30}{90} = \boxed{\frac{1}{3}}$

**2 pt** **2 -** On répète l'expérience précédente trois fois de suite, en remettant dans l'urne les deux boules tirées après chaque expérience. Soit $X$ la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'évènement $A$ est réalisé. **Montrons que** $p(X = 1) = \frac{4}{9}$ **puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire** $X$.

On répète la même expérience 3 fois de suite dans les mêmes conditions, donc la variable aléatoire $X$ suit une loi binômiale de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{3}$

$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

$p(X = 1) = C_3^1 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$

$p(X = 0) = C_3^0 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \frac{8}{27} = \boxed{\frac{8}{27}}$

$p(X = 2) = C_3^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{1}{9} \times \frac{2}{3} = \boxed{\frac{2}{9}}$

$p(X = 3) = C_3^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{3-3} = 1 \times \frac{1}{27} \times 1 = \boxed{\frac{1}{27}}$

Yassine Elamri



Today better https://steinmath.com omorrow better than today

## Problème : (8 pts)

### Partie I

On considère la fonction $g$ définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x} - 1 + 2\ln x$
On donne, ci-contre, le tableau de variation de $g$ sur $]0;+\infty[$.

0,25 pt

**1 - Calculons** $g(1)$.

On a : $g(1) = \frac{2}{1} - 1 + 2\ln 1 = 2 - 1 + 2 \times 0 = \boxed{1}$

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $g(1)$ | ↗ | $+\infty$ |

0,75 pt

**2 - Déduisons que** $g(x) > 0$ **pour tout** $x$ **de** $]0;+\infty[$.

D'après le tableau de variations, la fonction $g$ admet un minimum

Alors pour tout $x$ de $]0;+\infty[$, on a $g(x) \geq g(1)$

Et puisque $g(1) = 1$ alors $(\forall x \in ]0;+\infty[) \quad g(x) \geq 1$

D'où $(\forall x \in ]0;+\infty[) \quad g(x) > 0$

### Partie II

On considère la fonction $f$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = 3 - 3x + 2(x+1)\ln x$. $(C_f)$ est la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ d'unité $2cm$.

0.75 pt

**1 - Calculons** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **et interprétons le résultat géométriquement.**

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (3 - 3x + 2(x+1)\ln x) = \boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
- On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$. Alors la courbe $(C_f)$ admet la droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) comme asymptote verticale.

0.5 pt

**2 - a) Calculons** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Remarquons que $(\forall x \in \mathbb{R}^{+*}) \; f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x\right]$ Donc :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (3 - 3x + 2(x+1)\ln x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x\right) \\ &= \boxed{+\infty}\end{aligned}$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$

0.5 pt

**b) Étudions la branche infinie de** $(C_f)$ **au voisinage de** $+\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln x\right) = +\infty$. Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$. Alors $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

Yassine Elamri


Today better https://steinmath.com morrow better than today

0.75 pt **3 - a) Montrons que $f'(x) = g(x)$, pour tout $x$ de $]0, +\infty[$.**

Soit $x \in ]0;+\infty[$. On a $x \longmapsto 3-3x$ et $x \longmapsto 2(x+1)$ sont deux polynômes dérivables sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$ et donc sur $]0;+\infty[$ et puisque la fonction $ln$ est aussi dérivable sur $]0;+\infty[$, alors la fonction $f$ est dérivable sur $]0;+\infty[$. (comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$). Et

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3-3x+2(x+1)\ln x)' \\ &= -3+2\left(\ln x+(x+1)\frac{1}{x}\right) \\ &= -3+2\ln x+2(x+1)\frac{1}{x} \\ &= -3+2\ln x+2+\frac{2}{x} \\ &= -1+2\ln x+\frac{2}{x} \\ &= \frac{2}{x}-1+2\ln x \end{aligned}$$

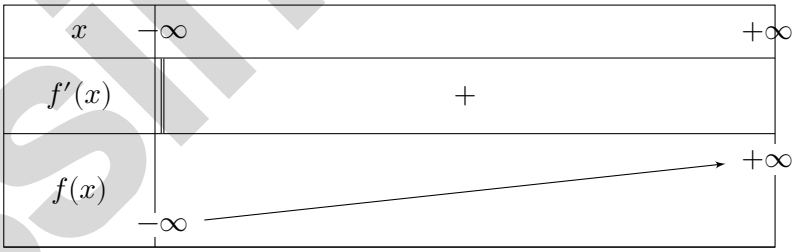
Alors : $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[)\ f'(x) = g(x)}$

0.75 pt **b) Étudions les variations de $f$, puis dresser son tableau de variation sur $]0, +\infty[$.**

On a $g(x) > 0$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$

Alors $f'(x) > 0$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$

D'où $f$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$. Alors le tableau de variations de la fonction $f$ est :




0.5 pt **4 - a) Montrons que $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $(C_f)$.**

Soit $x \in ]0;+\infty[$. On a :

$f"(x) = g'(x) = \left(\frac{2}{x}-1+2\ln x\right)' = \frac{-2}{x^2}+\frac{2}{x} = \boxed{\frac{-2+2x}{x^2}}$ Donc le signe de $f''(x)$ est le signe de $-2+2x$. Or : $f"(x) = 0 \iff 1-x = 0 \iff x = 1$. D'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f"(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

$f"(x)$ s'annule et change de signe en 1, donc $I(1;0)$ est un point d'inflexion de la courbe $(C_f)$.

Yassine Elamri

0.25 pt **b) Montrons que $y = x - 1$ est l'équation de la tangente $(T)$ au point $I(1;0)$ à la courbe $(C_f)$.**

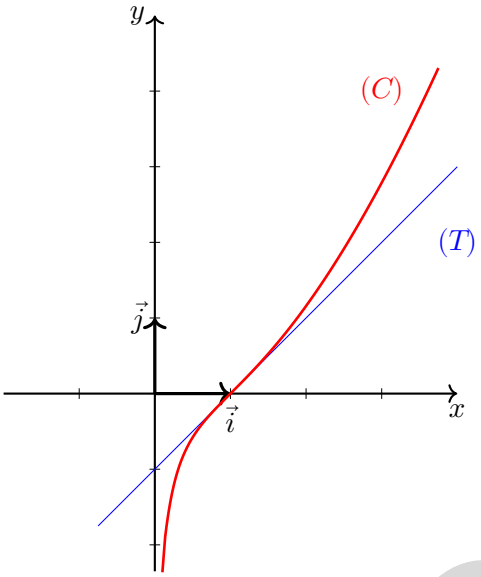
On a : $f'(1) = \dfrac{2}{1} - 1 + 2\ln 1 = 1$ et $f(1) = 0$.

Donc l'équation de la tangente $(T)$ s'écrit sous la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$\Rightarrow \quad y = 1(x-1) + 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{(T) : y = x - 1}$

0.75 pt **c) Traçons sur le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$, la droite $(T)$ et la courbe $(C_f)$.**

La courbe $(C_f)$ et la tangente $(T)$ :




0.5 pt **5 - a) Montrons que : $\displaystyle\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}$.**

On a :

$$I = \int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \mathrm{d}x = \left[x + \frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2 + \frac{4}{4} - \left(1 + \frac{1}{4}\right) = 3 - \frac{5}{4}$$

Donc : $\boxed{\displaystyle\int_1^2 \left(1 + \frac{x}{2}\right) dx = \frac{7}{4}}$.

0.75 pt **b) Montrons, par une intégration par parties, que : $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$.**

Yassine Elamri

On a : $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{1}{2}(x+1)^2 \end{cases}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x+1)\ln x dx &= \left[\frac{1}{2}(x+1)^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\times 3^2 \ln 2 - 0\right) - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{x^2+2x+1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{1}{2}\int_1^2 \left(x+2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \frac{x+2}{2}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\Big[\ln x\Big]_1^2 \\
&= \frac{9}{2}\ln 2 - \frac{7}{4} - \frac{1}{2}\Big(\ln 2 - 0\Big)
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{A = \int_1^2 (x+1)\ln x dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}}$

**0.5 pt**

**c) Calculons en $cm^2$, $S$ l'aire du domaine limité par la courbe $(C_f)$, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x=1$ et $x=2$.**

Soit $x \in [1,+\infty[$. Puisque la fonction $f$ est croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$, alors :

$$\begin{aligned}
x \geq 1 &\Longrightarrow f(x) \geq f(1) \quad (f(1)=0) \\
&\Longrightarrow f(x) \geq 0
\end{aligned}$$

D'où $(\forall x \in [1,2])\ |f(x)| = f(x)$.

$$\begin{aligned}
S &= \left(\int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x\right) \times \left(||\vec{i}||\right)^2 \quad (||\vec{i}|| = 2cm) \\
&= \left(\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x\right) \times (2cm)^2 \\
&= \left(\int_1^2 (3-3x+2(x+1)\ln x)\,\mathrm{d}x\right) \times 4cm^2 \\
&= \left(\int_1^2 3(1-x)\mathrm{d}x + \int_1^2 2(x+1)\ln x\mathrm{d}x\right) \times 4cm^2 \\
&= \left(3\int_1^2 (1-x)\mathrm{d}x + 2\int_1^2 (x+1)\ln x\mathrm{d}x\right) \times 4cm^2 \quad \left(A = \int_1^2 (x+1)\ln x dx\right) \\
&= \left(3\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + 2A\right) \times 4cm^2 \\
&= \left[3(2-2) - 3\left(1-\frac{1}{2}\right) + 2\times\left(4\ln 2 - \frac{7}{4}\right)\right] \times 4cm^2 \\
&= \left[\frac{-3}{2} + 8\ln 2 - \frac{7}{2}\right] \times 4cm^2 \\
&= (8\ln 2 - 5) \times 4cm^2
\end{aligned}$$

Yassine Elamri

Donc $\boxed{S = (32\ln 2 - 20)cm^2}$

0.5 pt

**6 - Résolvons graphiquement, dans l'intervalle $]0;+\infty[$, l'inéquation :** $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$.

Soit $x \in ]0;+\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1) &\iff 2(x+1)\ln x \geq 3x-3\\ &\iff 3-3x+2(x+1)\ln x \geq 0\\ &\iff f(x) \geq 0\end{aligned}$$

Graphiquement, la courbe $(C_f)$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

Donc $(\forall x \in [1;+\infty[)\ f(x) \geq 0$.

D'où, l'ensemble des solutions de l'équation $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$ est : $\boxed{S = [1;+\infty[}$.

Yassine Elamri

FIN