ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal-2 2015

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

1 - on a : $(P) : x+y+z+4=0$ et $\Omega(1;-1;-1)$

0.75 pt **a)** $d(\Omega;(P)) = \dfrac{|x_\Omega + y_\Omega + z_\Omega + 4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{|1-1-1+4|}{\sqrt{3}} = \dfrac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

et puisque : $R = \sqrt{3}$ Alors : $d(\Omega;(P)) = R$

donc le plan (P) est tangent à la sphère (S).

0.5 pt **b)** on a : $(P) : x_H + y_H + z_H + 4 = 0 - 2 - 2 + 4 = 0$

Alors : $H \in (P)$ (1)

et on a : $\Omega H = \sqrt{(0-1)^2+(-2+1)^2+(-2+1)^2} = \sqrt{3}$

Alors : $\Omega H = R$

Alors : $H \in (S)$ (2)

d'après (1) et (2), H est le point de contact du plan (P) et la sphère (S).

2 - on a : $A(2;1;1)$ et $B(1;0;1)$

0.75 pt **a)** $*$ Alors : $\overrightarrow{OA}(2;1;1)$ et $\overrightarrow{OB}(1;0;1)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1-0)\vec{i} - (2-1)\vec{j} + (0-1)\vec{k}$

donc : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$

$*$ on a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(1;-1-1)$ est le vecteur normal au plan (OAB). Alors l'équation cartésienne du plan (OAB) s'écrit sous la forme : $x-y-z+d=0$.

et on a : $A \in (OAB)$. Alors : $x_A + y_A + z_A + d = 0 \Leftrightarrow 2-1-1+d=0 \Leftrightarrow d=0$

donc : $(OAB) : x-y-z=0$

0.5 pt **b)** puisque (Δ) est orthogonale au plan (P).

Alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(1;-1-1)$ est le vecteur directeur de la droite (Δ).

et on a : $\Omega \in (\Delta)$

Alors : $(\Delta) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$ est la représentation paramétrique de la droite Δ

0.5 pt **c)** (S) est la sphère de centre $\Omega(1;-1;-1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

Alors : $(S) : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3$

Et puisque : (Δ) passant par Ω, alors elle coupe la sphère en deux points.

$$(\Delta) \cap (S) : \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-t \\ z = -1-t \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 3 \end{cases} ; \ (t \in \mathbb{R})$$

$\Leftrightarrow (1+t-1)^2 + (-1-t+1)^2 + (-1-t+1)^2 = 3$

$\Leftrightarrow t^2 + t^2 + t^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 = 1$

$\Leftrightarrow t = 1 \ \ ou \ \ t = -1$

Alors le triplet des coordonnées de chacun des deux points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S) sont : $(2;-2;-2)$ et $(0;0;0)$.

Exercice 2 : (3 pts)

0.25 pt **1 -** Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 + 10z + 26 = 0$

On a : $\Delta = b^2 - 4ac = 10^2 - 4 \times 1 \times 26 = 100 - 104 = -4$

Comme $\Delta \leq 0$ alors l'équation admet deux solutions distincts dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-10 - i\sqrt{-(-4)}}{2 \times 1} \\ &= \frac{-10 - i\sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{-10 - 2i}{2} \\ &= -5 - i \end{aligned}$$

$$z_2 = \overline{z_1} = -5 + i$$

Donc : $S = \{-5-i; -5+i\}$

Yassine Elamri

0.5 pt **2 - a)** Montrons que : $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$.

$$\begin{aligned}\frac{b-\omega}{a-\omega}&=\frac{-5+i+3}{-2+2i+3}\\&=\frac{-2+i}{2i+1}\\&=\frac{i\,(2i+1)}{2i+1}\\&=i\end{aligned}$$

0.5 pt **b)** Déduisons la nature du triangle ΩAB. Puisque $\dfrac{b-\omega}{a-\omega}=i$ alors $\left(\overrightarrow{\Omega B},\overrightarrow{\Omega A}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $\Omega B=\Omega A$.

Alors ΩAB est un triangle rectangle isocèle .

0.5 pt **3 - a)** Montrons que : d l'affixe du point D est $1+3i$.

$$\begin{aligned}T(C)=D&\Longleftrightarrow\overrightarrow{CD}=\vec{u}\\&\Longleftrightarrow d-c=z_{\vec{u}}\\&\Longleftrightarrow d-c=6+4i\\&\Longleftrightarrow d=6+4i-5-i\\&\Longleftrightarrow d=1+3i\end{aligned}$$

0.75 pt **b)** Montrons que : $\dfrac{b-d}{a-d}=2$.

∗ On a : $\dfrac{b-d}{a-d}=\dfrac{-5+i-(1+3i)}{-2+2i-(1+3i)}=\dfrac{-6-2i}{-3-i}=\dfrac{2\,(-3-i)}{-3-i}=2.$

∗ On a : $\dfrac{b-d}{a-d}=2\in\mathbb{R}$

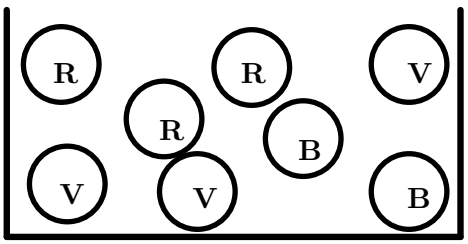
Donc les points B, D et A sont alignés et de plus $BD=2AD$

Donc A est le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 3 : (3 pts)

On tire **successivement sans remise** deux boules de l'urne.

on a : $card(\Omega)=A_8^2=8\times7=56$



Yassine Elamri

1.5 pt

1 - Calculons $P(A)$:

$*$ Méthode (1)

A :"2×(B et $\overline{B}$) ou (B ; B)"

Alors : $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{2 \times (A_2^1 \times A_6^1) + A_2^2}{56} = \dfrac{2 \times 2 \times 6 + 2}{56} = \dfrac{26}{56} = \dfrac{13}{28}$

$*$ Méthode (2)

$\overline{A}$:"n'obtenir aucune boule blanche"

c.à.d : $\overline{A}$: "$(\overline{B};\overline{B})$"

Alors : $P(\overline{A}) = \dfrac{card(\overline{A})}{card(\Omega)} = \dfrac{A_6^2}{56} = \dfrac{6 \times 5}{56} = \dfrac{30}{56} = \dfrac{15}{28}$

Donc : $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{15}{28} = \dfrac{28 - 15}{28} = \dfrac{13}{28}.$

Calculons $P(B)$:

B :"(R ;R) ou (B ;B) ou (V ;V)"

$P(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} = \dfrac{A_3^2 + A_2^2 + A_3^2}{56} = \dfrac{3 \times 2 + 2 \times 1 + 3 \times 2}{56} = \dfrac{14}{56} = \dfrac{1}{4}.$

2 - Soit X est la variable aléatoire qui est égal au nombre de boules blanches tirées.

$(X = 0)$: "n'obtenir aucune boule blanche tirée".

$(X = 1)$: "obtenir exactement une seule boule blanche".

$(X = 2)$: "obtenir exactement deux boules blanches".

Alors : $X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$

0.5 pt

a) Calculons $P(X = 2)$:

$P(X = 2) = \dfrac{A_2^2}{56} = \dfrac{2}{56} = \dfrac{1}{28}.$

1 pt

b) Calculons $P(X = 0)$:

$P(X = 0) = P(\overline{A}) = \dfrac{15}{28}.$

Calculons $P(X = 1)$:

$*$ Méthode (1)

$(X = 1)$: "2×(B et $\overline{B}$)"

Alors : $P(X = 1) = \dfrac{2 \times A_2^1 \times A_6^1}{56} = \dfrac{2 \times 2 \times 6}{56} = \dfrac{24}{56} = \dfrac{12}{28} = \dfrac{3}{7}$

Yassine Elamri

Today better than https://steinmath.com ow better than today

∗ Méthode (2)

$$P(X=1)=1-P(X=0)-P(X=2)=1-\frac{15}{28}-\frac{1}{28}=\frac{28-16}{28}=\frac{12}{28}=\frac{3}{7}$$

∗ Donc la loi de probabilité :

a_i	0	1	2
$P(X=a_i)$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{28}$

∗ L'espérance mathématique $E(X)$:

$$E(X)=0\times\frac{15}{28}+1\times\frac{12}{28}+2\times\frac{1}{28}=\frac{12+2}{28}=\frac{14}{28}=\frac{1}{2}$$

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I

Pour tout x de $\mathbb{R}$; on a :

$g(x)=e^x-2x$

0.75 pt **1 -** soit x de $\mathbb{R}$; on a :

$g'(x)=(e^x-2x)'=e^x-2$

– pour $x=ln(2)$ on a : $g'(ln(2))=0$

– si $x\geq ln(2)\Leftrightarrow e^x\geq 2\Leftrightarrow e^x-2\geq 0$

Alors : $(\forall x\in[ln(2);+\infty[):g'(x)\geq 0$

Donc g est croissante sur $[ln(2);+\infty[$.

– si $x\leq ln(2)\Leftrightarrow e^x\leq 2\Leftrightarrow e^x-2\leq 0$

Alors : $(\forall x\in]-\infty;ln(2)]):g'(x)\leq 0$

Donc g est décroissante sur $]-\infty;ln(2)]$.

0.5 pt **2 -** $g(ln(2))=e^{ln(2)}-2ln(2)=2-2ln(2)=2(1-ln(2))$

et puisque $ln(2)\backsimeq 0.69$

Alors : $g(ln(2))>0$

0.5 pt **3 -** on a : $g(ln(2))$ est la valeur minimale de g, et puisque $g(ln(2))>0$

Alors : $(\forall x\in\mathbb{R}):g(x)>0$

Partie II

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-2x}$

1 pt **1 - a)** ∗ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-2}=0$

Yassine Elamri

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

$*$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}-2}=\dfrac{-1}{2}$

Car : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$

0.5 pt **b)** $*$ on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

Alors $y=0$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

$*$ on a : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{-1}{2}$.

Alors $y=\frac{-1}{2}$ est une asymptote horizontale à (C_f) au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt **2 - a)** Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{e^x-2x}\right)'=\frac{x'(e^x-2x)-x(e^x-2x)'}{(e^x-2x)^2}$$
$$=\frac{e^x-2x-x(e^x-2)}{(e^x-2x)^2}=\frac{e^x-2x-xe^x+2x}{(e^x-2x)^2}=\frac{e^x(1-x)}{(e^x-2x)^2}$$

Alors : $(\forall x\in\mathbb{R}):f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x-2x)^2}$

0.75 pt **b)** on a : $(\forall x\in\mathbb{R}):e^x>0$ et $(e^x-2x)^2>0$

Alors le signe de $f'(x)$ dépend au signe de $(1-x)$.

pour $x=1$ on a : $f'(1)=0$

$*$ si $x\geq 1\Leftrightarrow 1-x\leq 0$

Alors : $(\forall x\in[1;+\infty[):f'(x)\leq 0$

donc f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

$*$ si $x\leq 1\Leftrightarrow 1-x\geq 0$

Alors : $(\forall x\in]-\infty;1]):f'(x)\geq 0$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty;1]$.

$*$ tableau de signe de la fonction f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{-1}{2}$	↗	$f(1)=1.39$	↘	0

0.25 pt **c)** la droite (T) est tangente à la courbe (C_f) au point $O(0;0)$.

Alors : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$

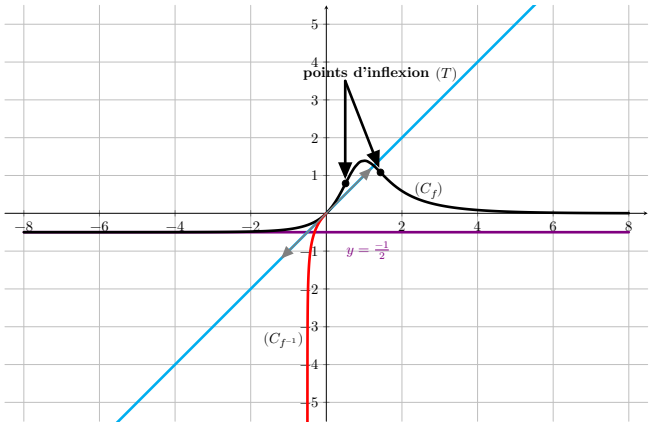
et on a : $f'(0)=\dfrac{(1-0)e^0}{(e^0-0)^2}=\dfrac{1}{1}=1$

et : $f(0)=\dfrac{0}{e^0-2\times 0}=0$

Donc : $y=x$ est l'équation de la tangente (T).

Yassine Elamri

1.5 pt **3 -** La courbe de la fonction f et la courbe de la fonction réciproque h^{-1} :



0.75 pt **4 - a)** pour tout x de $[0;+\infty[$, on a : $e^x - 2x \leq e^x$

et puisque : $(\forall x \in \mathbb{R}) : g(x) = e^x - 2x > 0$ d'après la question $(P_1 - 3)$, c.à.d : $e^x - 2x \neq 0$

Alors : $\dfrac{1}{e^x} \leq \dfrac{1}{e^x - 2x}$

c.à.d : $e^{-x} \leq \dfrac{1}{e^x - 2x}$

d'où : $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x}$ pour tout x de $[0;+\infty[$ (1)

et on a d'après le tableau de variation de f, $f(1)$ est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}$.

Alors : $(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x) \leq f(1)$

d'où : $\dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0;+\infty[$ (2)

d'après (1) et (2) on a : $xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$ pour tout x de $[0;+\infty[$.

0.75 pt **b)** Montrons que : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = 1 - \frac{2}{e}$

on pose : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases}$ Alors : $\begin{cases} u(x) = 1 \\ v'(x) = -e^{-x} \end{cases}$

Alors : $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx = \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx$

$= \Big[-xe^{-x}\Big]_0^1 - \Big[e^{-x}\Big]_0^1$

$= -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = -e^{-1} - e^{-1} + 1 = -2e^{-1} + 1 = 1 - \dfrac{2}{e}$

0.5 pt **c)** puisque (C_f) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[0;1]$.

Alors : $(\forall x \in [0;1]) : f(x) \geq 0$

Alors : $A(E) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x - 2x}dx$

et d'après question $(P_2 - 4 - a)$, on a :

$xe^{-x} \leq \dfrac{x}{e^x - 2x} \leq \dfrac{1}{e-2}$

Yassine Elamri

Alors : $\int_0^1 xe^{-x} \leq \int_0^1 \frac{x}{e^x - 2x} \leq \int_0^1 \frac{1}{e-2}$

Donc : $1 - \frac{2}{e} \leq A(E) \leq \frac{1}{e-2}$.

Partie III

0.5 pt **1 -** on a pour tout x de $]-\infty;0]$: $h(x) = f(x)$

Alors d'après le tableau de variation de la fonction f on a h est continue et strictement croissante sur $]-\infty;0]$.

d'où la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur :

$J = h\left(\left]-\infty;0\right]\right) = \left]\lim\limits_{x\to-\infty} h(x); h(0)\right] = \left]\frac{-1}{2};0\right]$

Partie IV

0.5 pt **1 -** Montrons par récurrence que $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$ on a $u_0 = -2$ et $-2 \leq 0$ alors $U_0 \leq 0$ est vrai.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. On a $u_n \leq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence.

  Donc $h(u_n) \leq h(0)$ car h croissante sur $]-\infty;0]$.

  Donc $u_{n+1} \leq 0 \quad (h(0) = 0)$
- D'où d'après le principe de récurrence $u_n \leq 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **2 -** Montrons que (u_n) est croissante. On a $u_{n+1} - u_n = h(u_n) - u_n \geq 0$ car d'après la courbe $h(x) \geq x$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;0]$.

Donc (u_n) est croissante.

0.75 pt **3 -** Déduisons que la suite (u_n) est convergente et calculons sa limite

— Comme (u_n) est croissante et $u_n \leq 0$ alors (u_n) est convergente.

— Soit $I =]-\infty;0]$, on a h est continue sur I , $f(I) = I$,$u_0 \in I$ et (u_n) est convergente

Alors $\lim u_n$ est une solution de l'équation $h(x) = x$

Et d'après la représentation graphique de la fonction f, on remarque que l'équation $h(x) = x$ admet une unique solution $x = 0$ sur $]-\infty;0]$.

Donc $\lim u_n = 0$.

FIN

Yassine Elamri