ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Rattrapage 2014

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a : $A(0,0,1)$ et $(P) : 2x + y - 2z - 7 = 0$ et $(S) : S(\Omega; 3)$ telle que $\Omega(0,3,-2)$.

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point A et perpendiculaire sur le plan (P).

On a $2x + y - 2z - 7 = 0$ équation de le plan (P), alors le vecteur $\vec{n}(2,1,-2)$ est une vecteur normale sur le plan (P)

Puis que $(\Delta) \perp (P)$, donc le vecteur $\vec{n}(2,1,-2)$ vecteur détecteur de la droite (Δ)

Par suit on a $A \in (\Delta)$, donc la représentation paramétrique de la droite (Δ) est :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 0 + 2t \\ y = 0 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

D'où $(\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Donc la représentation paramétrique de la droite (Δ) qui passe par le point $A(0,0,1)$ et perpendiculaire sur le plan (P) est : $(\Delta) : \begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

0.5 pt **b)** Vérifions que $H(2,1,-1)$ point d'intersection de plan (P) et la droite (Δ).

On a : $(\Delta) \perp (P)$ donc la droite (Δ) qui coupe le plan (P) un seule pont.

Par suit $\begin{cases} x_H = 2t \\ y_H = t \\ z_H = 1-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 2t \\ 1 = t \\ -1 = 1-2t \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 1 \end{cases}$

Donc $H \in (\Delta)$.

D'autre part on a $2x_H + y_H - 2z_H - 7 = 2 \times 2 + 1 - 2 \times (-1) - 7$

$= 4 + 1 + 2 - 7 = 7 - 7 = 0.$

Donc $H \in (P)$.

D'où $H \in (\Delta) \bigcap (P)$.

Donc H est un point d'intersection de la droite (Δ) et le plan (P).

0.75 pt **2 - a)** Montrons que $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$ telle que $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

On a : $A(0,0,1)$ et $\Omega(0,3,-2)$

Alors $\overrightarrow{\Omega A}\,(x_A - x_\Omega; y_A - y_\Omega; z_A - z_\Omega)$ donc $\overrightarrow{\Omega A}\,(0-0; 0-3; 1-(-2))$ d'où $\overrightarrow{\Omega A}\,(0;-3;3)$

Par suit on a $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ donc $\vec{u}\,(2;1;-2)$

Alors

$$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & 0 & 2 \\ \vec{j} & -3 & 1 \\ \vec{k} & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 6\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$= 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$$

Donc $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

0.5 pt **b)** Montrons que $d(\Omega, (\Delta)) = 3$

On a $\vec{u}(2,1,-2)$ vecteur directeur de la droite (Δ) et $A \in (\Delta)$

Alors $d(\Omega, (\Delta)) = \dfrac{\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

On a par question $(2a)$, $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3\left(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}\right)$

Donc $d(\Omega, (\Delta)) = \dfrac{3\sqrt{1+2^2+2^2}}{\sqrt{2^2+1+(-2)^2}} = \dfrac{3\sqrt{1+4+4}}{\sqrt{1+4+4}}$

$= \dfrac{3\sqrt{9}}{\sqrt{9}} = 3$

0.75 pt **c)** Déduisons que la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) en H.

On a $d(\Omega, (\Delta)) = 3$

Puise que le rayon de la sphère est 3

Donc la droite (Δ) tangent à la sphère (S).

Yassine Elamri

• On a $\Omega H = \sqrt{(x_H - x_\Omega)^2 + (y_H - y_\Omega)^2 + (z_H - z_\Omega)^2}$

$= \sqrt{(2-0)^2 + (1-3)^2 + (-1-(-2))^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}$

$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

Donc $H \in (S)$

Par suit on a $H \in (\Delta)$

D'où la droite (Δ) est tangent à la sphère (S) en point H.

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la numérique $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par : $\begin{cases} u_1 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} \end{cases}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

0.75 pt **1 -** Montrons par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de$\mathbb{N}^*$.

• Pour $n = 1$ on a $u_1 = 5$ donc $u_1 > 2$

D'où la proposition est vraie pour $n = 0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Supposons que $u_n > 2$ et montrons que $u_{n+1} > 2$

On a : $u_{n+1} - 2 = \dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} - \dfrac{2(1+u_n)}{(1+u_n)} = \dfrac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1+u_n}$

$= \dfrac{3u_n - 6}{1+u_n} = \dfrac{3(u_n - 2)}{1+u_n}$

D'après l'hypothèse de récurrence on a : $u_n > 2 \Rightarrow u_n + 1 > 3$

$\Rightarrow u_n + 1 > 0$

et $u_n > 2 \Rightarrow u_n - 2 > 0$

Donc $\dfrac{3(u_n - 2)}{1+u_n} > 0 \Rightarrow u_{n+1} - 2 > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 2.$

Donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n > 2$.

1 pt **2 -** Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par : $v_n = \dfrac{3}{u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) Montrons que :$v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, puis Montrons que la suit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ arithmétique de raison 1.

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = \dfrac{3}{u_{n+1} - 2} = \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} - 2} = \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4}{1+u_n} - \dfrac{2(1+u_n)}{1+u_n}}$

$= \dfrac{3}{\dfrac{5u_n - 4 - 2 - 2u_n}{1+u_n}} = \dfrac{3}{\dfrac{3u_n - 6}{1+u_n}}$

$= \dfrac{3}{\dfrac{3(u_n - 2)}{1+u_n}} = 3 \times \dfrac{1+u_n}{3(u_n - 2)} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$

Donc $v_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{u_n - 2}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$

Yassine Elamri

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1+u_n}{u_n-2} - \dfrac{3}{u_n-2} = \dfrac{1+u_n-3}{u_n-2}$

$= \dfrac{u_n-2}{u_n-2} = 1$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suit arithmétique de raison 1.

0.75 pt **b)** Ecrivons v_n en fonction n et déduisons que $u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

• On a $v_1 = \dfrac{3}{u_1-2} = \dfrac{3}{5-2} = \dfrac{3}{3} = 1$, et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suit arithmétique de raison 1

Donc l'exprimons de v_n en fonction n est :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = v_1 + (n-1)\times 1 = 1 + n - 1 = n$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = n$

• On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \dfrac{3}{u_n-2}$

$\Rightarrow u_n - 2 = \dfrac{3}{v_n}$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3}{v_n} + 2$

$\Rightarrow u_n = \dfrac{3}{n} + 2$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$

0.5 pt **c)** Déterminons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = 2 + \dfrac{3}{n}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2 + \dfrac{3}{n} = 2$

Car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Exercice 3 : (3 pts)

Le candidat tire au hasard, successivement et sans remise, deux cartes d'une urne contenant 10 cartes : huit cartes concernant les mathématiques et deux cartes concernant la langue française (on suppose que les cartes sont indiscernables au toucher).

Soient les deux événements suivants :A :" Tirer deux cartes concernant la langue française ".

B:"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes ".

1.5 pt **1 -** Montrons que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{45}$ et que $\mathbb{P}(B) = \dfrac{16}{45}$.

On considère l'univers Ω.

On a le tirage est successivement et sans remise, donc $card(\Omega) = A_{10}^2 = 10 \times 9 = 90$.

Les cartes sont indiscernables au toucher, alors $\mathbb{P}(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{A_2^2}{90} = \dfrac{2}{45\times 2} = \dfrac{1}{45}$.

On a l'événement B:"Tirer deux cartes concernant deux matières différentes", alors carte de

Yassine Elamri

concernant la langue française et carte de concernant les mathématiques, puis que le tirage est successivement et sans remise donc on tient compte de l'ordre, d'où le coefficient d'ordre noté **p** est $p = 2$.

Donc $\mathbb{P}(B) = \dfrac{card(B)}{card(\Omega)} \times p = \dfrac{A_2^1 \times A_8^1}{90} \times 2 = \dfrac{2 \times 8}{2 \times 45} \times 2 = \dfrac{16}{45}$.

D'où $\mathbb{P}(A) = \dfrac{1}{45}$ et $\mathbb{P}(B) = \dfrac{16}{45}$

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de cartes tirées concernant la langue française.

0.25 pt **a)** Vérifions que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont : 0 et 1 et 2.

• On tire deux carte de concernant les mathématiques, alors la variable aléatoire X associe le nombre 0.

• On tire carte de concernant la langue française et carte les mathématiques, alors la variable aléatoire X associe le nombre 1.

• On tire deux carte de concernant la langue française, alors la variable aléatoire X associe le nombre 2.

D'où $X(\Omega) = \{0;\quad 1;\quad 2\}$.

1.25 pt **b)** Montrons que $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{28}{45}$.

On a l'événement $(X = 0)$ deux carte tire de de concernant les mathématiques, alors $card(X = 0) = A_8^2 = 8 \times 7 = 56$;

Donc $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{card(X = 0)}{card(\Omega)} = \dfrac{56}{90} = \dfrac{28}{45}$.

D'où $\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{28}{45}$.

• Déterminons la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On a l'événement $(X = 1)$ est l'événement B, donc $\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{16}{45}$.

Et On a l'événement $(X = 2)$ est l'événement A, donc $\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{45}$.

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est :

$X(\Omega)$	0	1	2
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\mathbb{P}(X = 0) = \dfrac{28}{45}$	$\mathbb{P}(X = 1) = \dfrac{16}{45}$	$\mathbb{P}(X = 2) = \dfrac{1}{45}$

Exercice 4 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - 4z + 5 = 0$.

On a : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 5 = 16 - 20 = -4$ donc $\Delta < 0$

Alors l'équation admet deux solutions complexes sont :

$z_1 = \dfrac{4 - i\sqrt{4}}{2} = \dfrac{4 - 2i}{2} = 2 - 2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2 + 2i$

Yassine Elamri

Todahttps://steinmath.comerday, tomorrow better than today

D'où $S = \{z_1 = 2 - 2i;\quad z_2 = 2 + 2i\}$.

2 - On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, les points A, B, C, D et Ω d'affixes respectives : $a = 2 + i$, $b = 2 - i$, $c = i$, $d = -i$ et $\omega = 1$.

0.25 pt **a)** Montrons que $\dfrac{a-w}{b-w} = i$

On a : $\dfrac{a-w}{b-w} = \dfrac{2+i-1}{2-i-1} = \dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \dfrac{1+2i-1}{1+1} = \dfrac{2i}{2} = i$

Donc $\dfrac{a-w}{b-w} = i$.

0.5 pt **b)** Déduisons que le triangle ΩAB rectangle et isocèle en Ω.

On a :

$$\begin{aligned}\frac{a-w}{b-w} = i &\Leftrightarrow \left|\frac{a-w}{b-w}\right| = |\ i\ | \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{a-w}{b-w}\right| = 1 \\ &\Leftrightarrow |\ a-w\ | = |\ b-w\ | \\ &\Leftrightarrow \Omega A = \Omega B \qquad (1)\end{aligned}$$

Par suit :

$$\begin{aligned}\frac{a-w}{b-w} = i &\Leftrightarrow \arg\left(\frac{a-w}{b-w}\right) = \arg(i) \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv \frac{\pi}{2} \qquad (2)\end{aligned}$$

Donc par (1) et (2) le triangle ΩAB est rectangle et isocèle en Ω.

D'où le triangle ΩAB rectangle et isocèle en Ω.

3 - Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0.5 pt **a)** Montrons que $z' = iz + 1 - i$

On a $R_{(\Omega;\frac{\pi}{2})}(M) = M' \Leftrightarrow z' - w = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - w)$

$\Leftrightarrow z' - 1 = e^{\frac{\pi}{2}i}(z - 1)$

Par suit : $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) = 0 + i = i$

Donc $z' = i(z-1) + 1$, alors $z' = iz - i + 1$

D'où $z' = iz + 1 - i$

0.5 pt **b)** Vérifions que $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

On a la relation complexe de la rotation R est : $z' = iz + 1 - i$

Alors : $ia + 1 - i = i(2+i) + 1 - i = 2i + i^2 + 1 - i = 2i - 1 + 1 - i = i = c$

Donc $R(A) = C$.

Yassine Elamri

On a $id + 1 - i = i(-i) + 1 - i = -i^2 + 1 - i = 1 + 1 - i = 2 - i = b$

Donc $R(D) = B$.

D'où $R(A) = C$ et $R(D) = B$.

0.5 pt **c)** Montrons que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

On a $R(A) = C$, alors $\Omega A = \Omega C$ (1)

et $R(D) = B$, alors $\Omega D = \Omega B$ (2)

Par suit : ΩAB triangle isocèle en Ω, donc $\Omega A = \Omega B$ (3)

Donc par (1) et (2) et (3) on obtient $\Omega A = \Omega C = \Omega D = \Omega B$

D'où les points A, B, C et D appartiennent au même cercle de centre Ω

Problème : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (xe^x - 1)e^x$$

0.75 pt **1 -** Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

• On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x - 1)e^x$

Puis que $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} (xe^x - 1)e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

• Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Donc $(\mathcal{C})$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.

0.75 pt **2 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)e^x$

Puis que $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)e^x = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(xe^x - 1)e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)\dfrac{e^x}{x}$

On sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$. et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$.

Alors, $\lim\limits_{x \to +\infty} (xe^x - 1)\dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Yassine Elamri

0.5 pt **b)** Déduisons que la courbe $(\mathcal{C})$ admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique dont on précisera la direction.

Puis que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Alors : $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique vers l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

1 pt **3 - a)** Montrons que :$f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$, pour tout x de $\mathbb{R}$ puis Vérifions que $f'(0)=0$

On a la fonction $x\longmapsto x$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, comme fonction polynôme.

Et la fonction $x\longmapsto e^x$ fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, (car la fonction e^x dérivable sur l'ensemble de définition).

Alors : la fonction $x\longmapsto xe^x-1$ dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Donc la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par suit : $\forall\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x)=((xe^x-1)e^x)'=(xe^x-1)'+e^x(xe^x-1)$

$=(e^x+xe^x)e^x+e^x(xe^x-1)=e^x(1+x+xe^x-1)$

$=e^x(e^x+xe^x+xe^x-1)=e^x(e^x+2xe^x-1)$

D'où $\forall\in\mathbb{R}$, $\quad f'(x)=e^x(e^x-1+2xe^x)$.

• On a $f'(0)=e^0(e^0-1+20\times e^0)=1\times(1-1+0)=0$

D'où $f'(0)=0$.

0.5 pt **b)** Montrons que :$e^x-1\geq 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$ et que $e^x-1\leq 0$ pour tout x de $]-\infty,0]$

• On a : $\forall x\in[0,+\infty[$, $\quad x\geq 0$

$\Rightarrow e^x\geq e^0$ (Car la fonction e^x fonction croissant).

$\Rightarrow e^x\geq 1$

$\Rightarrow e^x-1\geq 0$.

Donc $\forall x\in[0,+\infty[$, $\quad e^x-1\geq 0$

• On a : $\forall x\in]-\infty,0]$, $\quad x\leq 0$

$\Rightarrow e^x\leq e^0$ (Car la fonction e^x fonction croissant).

$\Rightarrow e^x\leq 1$

$\Rightarrow e^x-1\leq 0$.

Donc $\forall x\in]-\infty,0]$, $\quad e^x-1\leq 0$

1.25 pt **c)** Montrons que : la fonction f est croissante sur $[0,+\infty$ et qu'elle est décroissante sur $]-\infty,0]$, puis dresserons le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

• On a : $\forall\in\mathbb{R}$, $\quad e^x>0$

Par suit : $\forall\in[0,+\infty[$, $x\geq 0$

$\Rightarrow \quad \forall\in\mathbb{R} \quad 2xe^x\geq 0$

Puis que $\forall\in\in[0,+\infty[$, $\quad e^x-1\geq 0$, alors $e^x-1+2xe^x\geq 0$ Comme la somme de deux fonctions positives.

Yassine Elamri

Donc $\forall \in [0,+\infty[$, $\quad f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ croissant sur $[0,+\infty[$.

• On a : $\forall \in \mathbb{R}$, $\quad e^x > 0$

Par suit : $\forall \in]-\infty,0]$, $x \leq 0$

$\Rightarrow \quad \forall \in]-\infty,0] \quad 2xe^x \leq 0$

Puis que $\forall \in]-\infty,0]$, $\quad e^x - 1 \leq 0$, alors $e^x - 1 + 2xe^x \leq 0$ Comme la somme de deux fonctions négatives .

Donc $\forall \in]-\infty,0]$, $\quad f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ décroissant sur $]-\infty,0]$.

D'où : la fonction f, est croissante su $[0,+\infty[$, et décroissante sur $]-\infty,0]$.

• On dresse le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$f(0)=-1$	↗	$+\infty$

0.75 pt **4 - a)** Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0,+\infty[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. (on admettra que $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$).

• On a f continu sur $[0,+\infty[$; car f dérivable sur $\mathbb{R}$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. et $f(0) = -1$

On sait que f croissant sur $[0,+\infty[$, donc $f([0,+\infty[) = [f(0), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-1,+\infty[$

Puis que $0 \in [-1,+\infty[$, donc $0 \in f([0,+\infty[)$.

On a aussi f strictement croissant sur $[0,+\infty[$.

Donc d'après **T.V.I** l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in [0,+\infty[$.

• On a $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - 1) \times e^{\frac{1}{2}} < 0$, $\quad$ car $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$

et $f(1) = (e-1) \times e > 0$, $\quad$ car $e > 1$

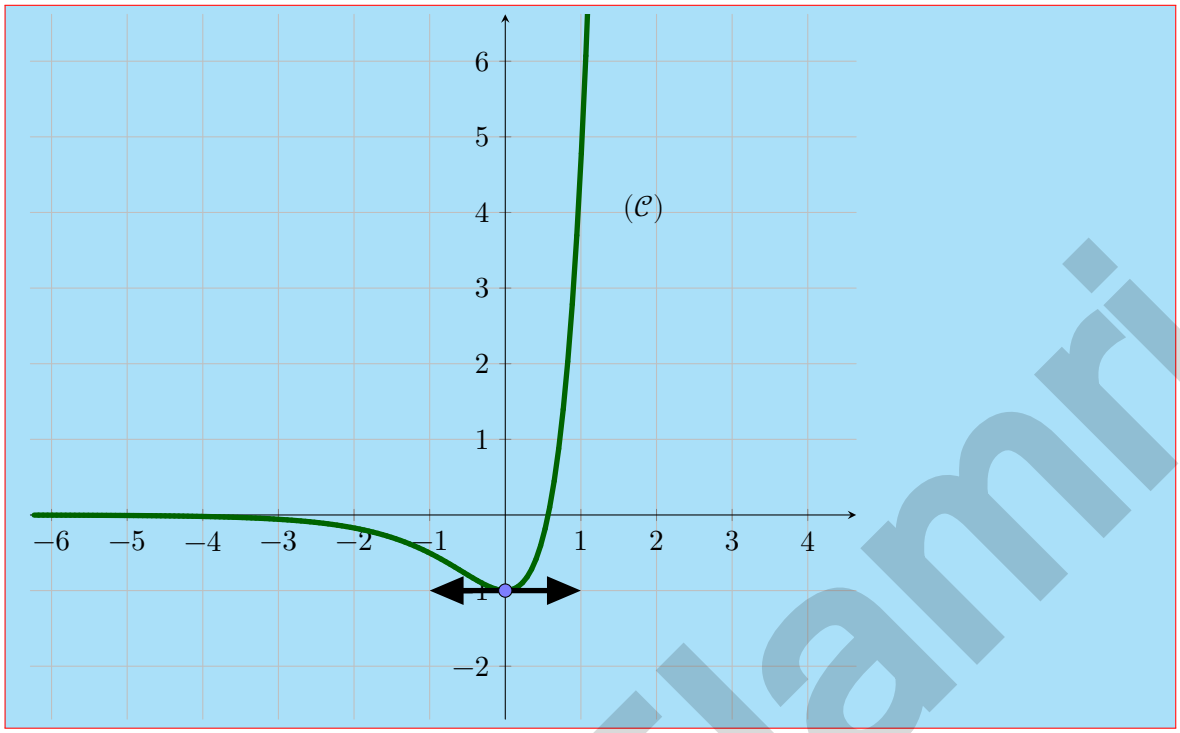
Alors $f(1) \times f(\frac{1}{2}) < 0$;

On sait que $]\frac{1}{2},1[\subset [0,+\infty[$, donc f continu et strictement croissant sur $]\frac{1}{2},1[$

Donc d'après **T.V.I**, $\quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$.

0.75 pt **b)** Construisons,dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite la courbe $(\mathcal{C})$

Yassine Elamri



0.75 pt **5 -** Montrons que $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$

On pose $\begin{cases} U = x \\ V' = e^{2x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U' = 1 \\ V = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

Donc par **I.P.P** on obtient, $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = [\frac{1}{2}xe^{2x}]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x}dx$

$= (\frac{1}{4}e - 0) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{2x} = \frac{1}{4}e - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}e^{2x}]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{4}e - \frac{1}{4}(e-1) = \frac{1}{4}$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx = \frac{1}{4}$

1 pt **6 -** Calculons en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe des abscisses et droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$

Soit **A** l'aire du domaine

Alors $\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|dx \times UA$

On sait que $\forall x \in [0, \frac{1}{2}], \quad f(x) \leq 0$ donc $|f(x)| = -f(x)$

Par suit : $\mathbf{A} = \int_0^{\frac{1}{2}} -f(x)dx \times UA = -\int_0^{\frac{1}{2}} (xe^x - 1)e^x dx \times UA$

$= -\int_0^{\frac{1}{2}} (xe^{2x} - e^x)dx \times UA = -\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx + \int_0^{\frac{1}{2}} e^x dx \times UA$

$= -\frac{1}{4} + [e^x]_0^{\frac{1}{2}} \times UA = (-\frac{1}{4} + e^{\frac{1}{2}} - 1) \times UA = (-\frac{1}{4} + e^{\frac{1}{2}} - 1) \times 4cm^2 = -5 + 4\sqrt{e}cm^2.$

D'où $\mathbf{A} = -5 + 4\sqrt{e} \ \ cm^2$.

FIN

Yassine Elamri