ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2014

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$, on considère les points : $A(0;3;1)$, $B(-1;3;0)$, et $C(0;5;0)$ et (S) la sphère d'équation : $x^2+y^2+z^2-4x-5=0$.

1 - a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$et en déduire que A, B et C sont non alignés.

on a $\overrightarrow{AC}(0;2;-1)$ et $\overrightarrow{AB}(-1;0;-1)$

Donc :

0.75 pt

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$

Puisque $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ Alors ls deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

d'où les points A, B et C ne sont pas alignées.

b) Montrer que : $2x-y-2z+5=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(2;1;-2)$ est un vecteur normal sur le plan (ABC)

donc l'équation cartésienne du plan (ABC) s'écrit sous la forme

$$(ABC):2x-y-2z+d=0$$

0.5 pt

On a $C(0;5;0)\in(ABC)$ donc $2\times0-5-2\times0+d=0$

donc $d=5$

D'où $(ABC) : 2x - y - 2z + 5 = 0$.

2 - a) Montrer que (S) est de centre $\Omega(2;0;0)$ et de rayon $R = 3$.

$$\begin{aligned} M(x,y,z) \in (S) &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 4 + y^2 + z^2 - 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2 = 9 = 3^2 \end{aligned}$$

0.5 pt

Donc le centre de la sphere (S) est $\Omega(2;0;0)$ et son rayon $R = 3$.

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).

$$\begin{aligned} d(\Omega,(ABC)) &= \frac{|2x_\Omega - y_\Omega - 2z_\Omega + 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \\ &= \frac{|2\times 2 - 0 - 2\times 0 + 5|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{|9|}{\sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{9}} \\ &= \sqrt{9} = 3 = R \end{aligned}$$

0.75 pt

Donc le plan (ABC) est tangente a la sphere (S).

c) Déterminer le triplet de coordonnées du point de tangence H du plan (ABC) et de la sphère (S).

On a $d(\Omega,(ABC)) = R = 3$ donc le plan (ABC) est tangente a la sphere (S) au point H, c'est a dire H est le point d'itersection de la droite (Δ) passant par $\Omega(2;0;0)$ est perpendiculaire sur le plan (ABC).

• Déterminons une représentation paramétrique de la droite (Δ)

La droite (Δ) et perpendiculaire au plan (ABC) donc le vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(2;-1;2)$ est directeur à la droite (Δ)

0.5 pt

$$M(x;y;z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M} = t\cdot\vec{n}/(t \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 2t \\ y - 0 = -t \\ z - 0 = -2t \end{cases} /(t \in R) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -2t \end{cases} /(t \in R)$$

on a H est le point d'intersection de (Δ) avec (P) :

$$M(x;y;z) \in (\Delta) \cap (P) \Leftrightarrow H \in (\Delta) \text{ et } H \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = -2t \\ 2x - y - 2z + 5 = 0 \end{cases}$$

remplaçons $2 + 2t; -t$ et $-2t$ dans la dernière équation $(2x - y - 2z + 5 = 0$ on trouve : $t = -1$

remplaçons : $t = -1$ dans la représentation paramétrique on trouve : $H(0;1;2)$

D'où le point d'intersection de (Δ) avec (P) est : $H(0;1;2)$

Yassine Elamri

Exercice 2 : (3 pts)

1 - Résoudre dans C l'équation :

$$z^2 - 8\sqrt{2} + 2 = 0$$

On a : $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 2 = 2 - 8 = -6 \quad < 0$

0.75 pt Donc les solution de l'équation sont :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

et

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$$

D'ou $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$

2 - Soit le nombre complexe u tel que :$u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$

a) Écrire u sous forme trigonométrique.

$|u| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{6}{4}} = \sqrt{\frac{8}{4}} = \sqrt{2}$

0.5 pt On pose $arg(u) \equiv \theta[2\pi]$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{Re(u)}{|u|} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{Im(u)}{|u|} = \dfrac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

D'ou $arg(u) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) En déduire que u^6 est un réel.

la forme trigonométrique du nombre u est $u = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{3} + isin(\frac{\pi}{3}))$ En utilisant la rela-

0.75 pt tion de Moiver : $u^6 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + is\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right)^6$

$= (\sqrt{2})^6\left(\cos\left(\frac{6\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right) = 8(\cos(2\pi) + i\sin(2\pi))$

$- 8(1 + i \times 0) = 8$

D'ou u^6 est un nombre réel

3 - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}.\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respective :$a = 4 - 4i\sqrt{3}$, et $b = 8$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre O et d'angle : $\frac{\pi}{3}$.

Yassine Elamri

a) Écrire z' en fonction de z

0.5 pt

On a :

$$R(M(z)) = M'(z') \Leftrightarrow z' - z_0 = (z - z_0)e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow z' = z(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + is\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Leftrightarrow z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$$

D'où $z' = (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})z$

b) Vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R.

$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z_A = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(4 - 4i\sqrt{3})$

$= 2 - 2i\sqrt{3} + 2i\sqrt{3} + 6$

$= 8 = b = z_B$

Donc $R(A) = B$ c'est a dire B est l'image de A par la rotation R

0.75 pt

• la nature du triangle OAB :

$$R(A) = B \Leftrightarrow b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) a$$
$$\Leftrightarrow \frac{b}{a} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} |\frac{b}{a}| = |\frac{b-0}{a-0}| = 1 \\ arg(\frac{b}{a}) \equiv arg(\frac{b-0}{a-0}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{OB}{OA} = 1 \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} OA = OB \\ (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$$

D'ou le triangle OAB est équilatérale.

Exercice 3 : (3 pts)

On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \frac{1}{2}un_n + 7$ et $u_0 = 13$

1 - Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})$: $u_n < 14$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 13 < 14$

0.75 pt

supposons que $u_n < 14$, et montrons que :$u_{n+1} < 14$, on a :

Yassine Elamri

$$u_n < 14 \Rightarrow \frac{1}{2}u_n < 7$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}u_n + 7 < 14$$
$$\Rightarrow u_{n+1} < 14.$$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 14.$

2 - Soit (v_n) la suite définit par : $\forall n \in \mathbb{N} : v_n = 14 - u_n$

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donner (v_n) en fonction de n.

Soit $n \in \mathbb{N}$) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = 14 - u_{n+1} &= 14 - (\frac{1}{2}u_n + 7) \\ &= 14 - \frac{1}{2}u_n - 7 \\ &= 7 - \frac{1}{2}u_n \\ &= \frac{1}{2}(14 - u_n) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

1 pt D'où (v_n) est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et du premier terme :

$v_0 = 14 - u_0 = 14 - 13 = 1.$

D'où (v_n) est une suite géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$ et du premier terme :$v_0 = 1.$

Alors le terme générale v_n de la suite (v_n) s'écrit sous la forme $v_n = v_0.q^n$

c'est a dire : $v_n = 1 \times (\frac{1}{2})^n = (\frac{1}{2})^n. \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$

b) En déduire que : $u_n = 14 - (\frac{1}{2})^n$, puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

On a : $v_n = 14 - u_n \Leftrightarrow u_n = 14 - v_n = 14 - (\frac{1}{2})^n.$

0.75 pt Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0.$ (car $-1 < (\frac{1}{2})^n < 1$).

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} (14 - (\frac{1}{2})^n) = 14 - 0 = 14.$ D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 14.$

c) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle :$u_n > 13,99.$

0.5 pt On a :

Yassine Flamri

$$\begin{aligned} u_n > 13,99 &\Leftrightarrow 14-(\frac{1}{2})^n > 13,99 \\ &\Leftrightarrow 14-13,99 > (\frac{1}{2})^n \\ &\Leftrightarrow 0.01 > (\frac{1}{2})^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,01) > \ln((\frac{1}{2})^n) \\ &\Leftrightarrow \ln(10^{-2} > n\ln(\frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow -2\ln(10) > -n\ln(2) \\ &\Leftrightarrow 2\ln(10) < n\ln(2) \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2\ln(10)}{\ln(2)} \\ &\Leftrightarrow n > 6,65 \end{aligned}$$

D'où $n = 7$ est la plus petite valeur d'entier naturel n pour laquelle on a $u_n > 13,99$.

Exercice 4 : (3 pts)

1 - On tire simultanément et au hasard deux jetons du sac :

• Calculons $card(\Omega) = C_9^2 = 36$.

1 pt L'événement A"**La sommes des nombes egale a 1"**

c'est a dire tirer une jeton porte le numéro 1, et une jeton porte le numéro 0

Donc $card(A) = C_4^1 \times C_5^1 = 4 \times 5 = 20$.

D'où $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{20}{36} = \dfrac{5}{9}$.

2 - a) Montrer que la probabilité de gain de Said est :$\frac{1}{6}$

1 pt L'événement B"**tirer deux jetons portant tous les deux le numero 1"** (Said gagne la partie)

$card(B) = C_4^2 = 6$

Donc $P(B) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.

b) Quelle est la probabilité pour que Said gagne exactement deux fois.

Said a répété 3 fois cette expérience

La variable aléatoire X associée aux épreuves répétées et qui donne le nombre de succès, est appelé variable aléatoire binomiale de paramètres n et p.

- $n = 3$: Nombre de répétition de l'expérience.
- $k = 2$: Nombre de fois que Said gagne la partie (La réalisation de l'événement B).

1 pt
- $P = P(B)$: La Probabilité que Said gagne .

Yassine Elamri

Donc La Probabilité que Said gagne la partie exactement deux fois est :

$$\begin{aligned} P(k=2) &= C_3^2 \times (P(B))^2 \times (1-P(B)) \\ &= 3 \times (\frac{1}{6})^2 \times (1-\frac{1}{6}) \\ &= 3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{72} \end{aligned}$$

D'où a Probabilité que Said gagne la partie exactement deux fois est : $\frac{5}{72}$

Probleme : (8 pts)

Partie I

$g(x) = 1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x)$ et $D_g =]0, +\infty[$

1 - Montrer que $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$ et en déduire que g est croissante sur :$]0, +\infty[$.

Soit $x \in D_g =]0, +\infty[$

On a la fonction g est dérivable sur $D_g =]0, +\infty[$ comme somme des fonctions dérivables sur $D_g =]0, +\infty[$ **0.5 pt**

Donc
$$\begin{aligned} g'(x) &= (1 - \frac{1}{x^2} + \ln(x))' \\ &= (1)' - ' (\frac{1}{x^2})' + (\ln(x))' \\ &= 0 - (\frac{-2x}{x^4}) + \frac{1}{x} \\ &= \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

D'où $g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

On a $x > 0$ donc $x^3 > 0$ c'est a dire $\frac{2}{x^3} > 0$, et $\frac{1}{x} > 0$

Donc $\forall x \in D_g =]0, +\infty[$ on a : $g'(x) > 0$

D'où la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2 - Vérifier que $g(1) = 0$ puis en déduire que : $g(x) \leq 0 (\forall x \in]0; 1])$, et $g(x) \geq 0 (\forall x \in [1; +\infty[$.

- On a $g(1) = 1 - \frac{1}{1^2} + \ln(1) = 1 - 1 = 0$
- On a sur l'intervalle $]0; 1]$: **0.75 pt**

$0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1)$(car g est croissante)$\Rightarrow g(x) \leq 0$.

D'où $g(x) \leq 0$ sur l'intervalle $]0; 1]$

- On a sur l'intervalle $[1; +\infty[$:

$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1)$ (car g est croissante)$\Rightarrow g(x) \geq 0$.

D'où $g(x) \geq 0$ sur l'intervalle $[1; +\infty[$

Yassine Elamri

Partie II

$f(x) = (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}$, et $D_f =]0;+\infty[$

1 - Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, et interpréter le résultat géométriquement.

0.5 pt

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty.$

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty.$

(car $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\ln(x)) = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$)

$((C_f)$ admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$.(l'axe des ordonnées).

2 - a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

0.25 pt

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2} = +\infty.$

(car $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+\ln(x)) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = 0$).

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} = 0$ (on peut poser $t = \sqrt{x}$, puis montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

1 pt

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(1+\ln(x))^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{1+\ln(x)}{\sqrt{x}})^2$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1+\ln(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}})^2$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1+2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}})^2$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{\sqrt{x}} + 2\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}})^2$$

On pose $t = \sqrt{x}$. si $x \longrightarrow +\infty$ alors $t \longrightarrow +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} = \lim\limits_{t\to+\infty} (\dfrac{1}{\sqrt{t}} + 2\dfrac{\ln(t)}{t})^2 = 0.$

(car $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\ln(t)}{t} = 0$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{1}{t} = 0$.)

D'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} + \dfrac{1}{x^3}) = 0$.

(car $\lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{(1+\ln(x))^2}{x} = 0$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^3}) = 0.)$

D'ou $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

c) Déterminer la branche infinie de (C_f) au voisinage de$+\infty$

0.25 pt

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f)x) = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

Donc la courbe (C_f) de la fonction f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

3 - a) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{2g(x)}{x} (\forall x \in]0;+\infty[)$

Soit $x \in]0;+\infty[$:

Yassine Elamri

$$f'(x) = ((1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2})'$$
$$= ((1+\ln(x)^2)' + (\frac{1}{x^2})'$$
$$= 2(1+ln(x))(1+ln(x))' + (\frac{1}{x^2})'$$
$$= 2(1+ln(x)) \times \frac{1}{x} + \frac{-2x}{x^4}$$

1.5 pt Donc
$$= \frac{2(1+ln(x))}{x} - \frac{\frac{2}{x^2}}{x}$$
$$= \frac{2(1+ln(x)) - \frac{2}{x^2}}{x}$$
$$= \frac{2(1+ln(x) - \frac{1}{x^2}}{x}$$
$$= \frac{2g(x)}{x}$$

D'ou $f'(x) = \frac{2g(x)}{x}$.

Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :$x > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $g(x)$.

D'apres la question .... On a :

- On a sur l'intervalle $]0;1]$: $g(x) \leq 0$, donc $f'(x) \leq 0$

Donc f est décroissante sur $]0;1]$.

- On a sur l'intervalle $[1;+\infty[$: $g(x) \geq 0$, donc $f'(x) \geq 0$

Donc f est croissante sur $[1;+\infty[$.

b) Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $f(x) \geq 2.(\forall x \in]0;+\infty[)$

tableau des variation :

$f'(1) = (1+ln(1))^2 + \frac{1}{1^2} = (1+0)^2 + 1 = 2.$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$ ↘	2	↗	$+\infty$

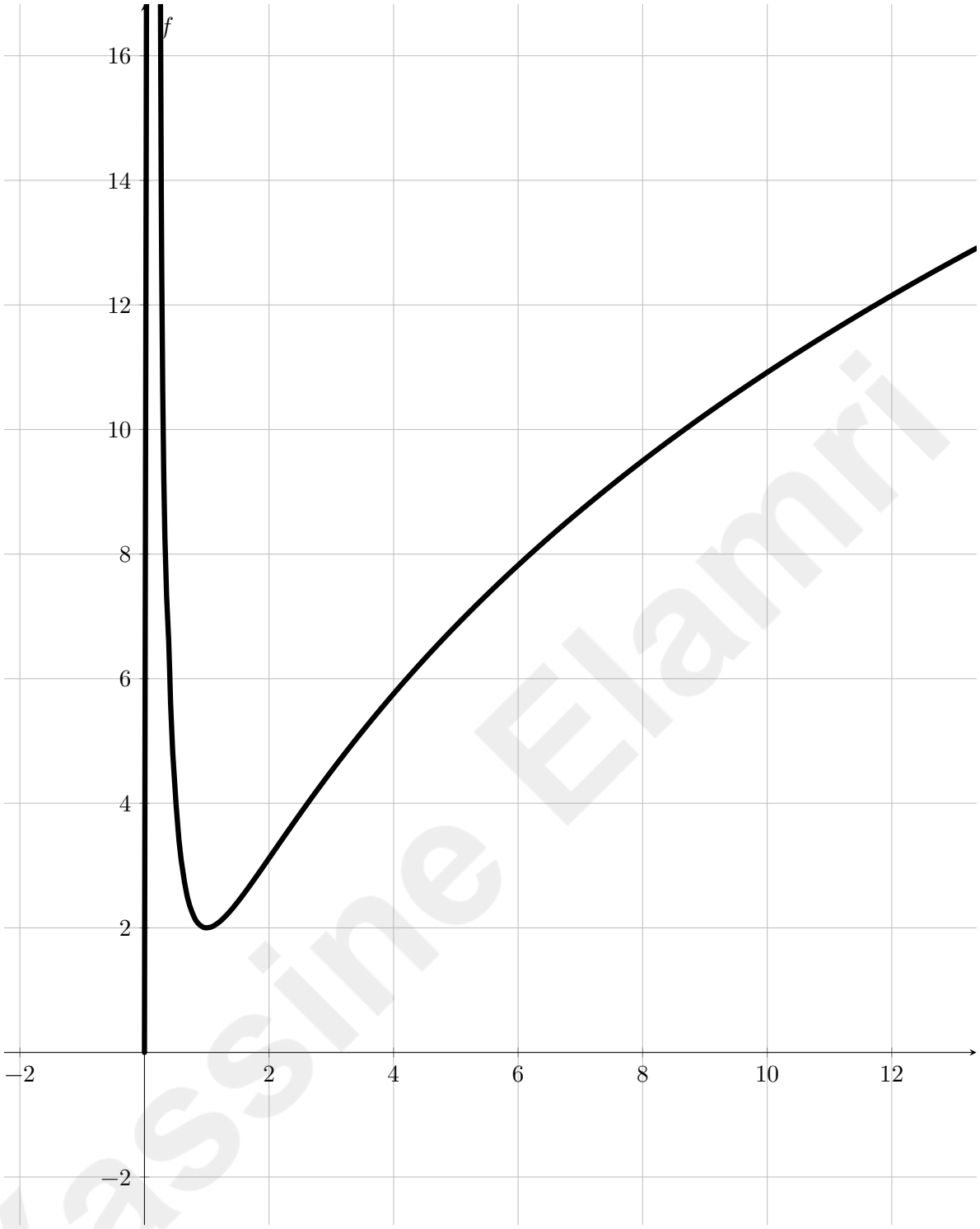
1 pt

On a $f(1)$ est une valeur minimal de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

$\forall x \in]0;+\infty[\quad , \quad f(x) \geq f(1) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in]0;+\infty[\quad , \quad f(x) \geq 2.$

0.75 pt **4 -** la courbe C_f de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

Yassine Elamri



5 - On considère les intégrales I et J suivants :$J = \int_1^e (1+\ln(x))^2 dx$, et $I = \int_1^e (1+\ln(x))dx$.

a) Monter que $H \longrightarrow xln(x)$ est une fonction primitive de $\longrightarrow 1 + ln(x)$ sur $]0;+\infty[$, puis en déduire que $I = e$

La fonction : $H : x \longrightarrow xln(x)$ est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Soit $x \in]0;+\infty[$, on a :

Yassine Elamri

$$H'(x) = (xln(x))'$$
$$= (x)'ln(x) + x(ln(x))'$$
0.5 pt $$= ln(x)) + x \times \frac{1}{x}$$
$$= ln(x) + 1$$
$$= h(x)$$

Donc $H(x)$ est une fonction primitive de la fonction $h(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

• : Calculons I :

$$I = \int_1^e (1 + \ln(x))dx$$
$$= \int_1^e h(x)dx$$
$$= [H(x)]_1^e$$
$$= H(e) - H(1)$$
$$= eln(e) - 1ln(1)$$
$$= e - 0 = e$$

$I = e.$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer $J = 2e - 1$.

On a : $J = \int_1^e (1 + \ln(x))^2 dx$:

On pose : $u(x) = (1 + \ln(x))^2$, et $v'(x) = 1$

Alors $u' = \frac{2(1 + \ln(x))}{x}$, et $v(x) = x$.

0.5 pt Donc :

$$J = [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - \int_1^e \frac{2(1 + \ln(x))x}{x} dx$$
$$= [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - \int_1^e 2(1 + \ln(x))dx$$
$$= [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - 2\int_1^e (1 + \ln(x))dx$$
$$= [x(1 + \ln(x))^2]_1^e - 2I$$
$$= e(1 + ln(e))^2 - 1(1 + ln(1))^2 - 2e$$
$$= e(1 + 1)^2 - 1(1 + 0)^2 - 2e$$
$$= 4e - 1 - 2e$$
$$= 2e - 1.$$

$J = 2e - 1$

c) Soit A l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) ; l'axe des abscisses et les droite :

0.5 pt $x = e$, et $x = 1$:

Yassine Elamri

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_1^e |f(x)|dx(u.a) \\
&= \int_1^e f(x)dx \times 1cm \times 1cm \\
&= \int_1^e (1+\ln(x))^2 + \frac{1}{x^2}dx \times 1cm^2 \\
&= \int_1^e (1+\ln(x))^2 dx \times 1cm^2 + \int_1^e \frac{1}{x^2}dx \times 1cm^2 \\
&= \left(2e - 1 + \left[\frac{-1}{x}\right]_1^e\right) cm^2 \\
&= \left(2e - 1 + (\frac{-1}{e} + \frac{1}{1}\right) cm^2 \\
&= \left(2e - 1 - \frac{1}{e} + \frac{1}{1}\right) cm^2 \\
&= \left(2e - \frac{1}{e}\right) cm^2.
\end{aligned}
$$

$\boxed{\mathrm{A} = \left(2e - \frac{1}{e}\right) cm^2}$

Yassine Elamri

FIN