ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2013

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : : (3 pts)

On considère dans un espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j})$ les points $A(-1;1;0)$, $B(1;0;1)$ et $\Omega(1;1;-1)$ et la sphère (S) de centre Ω et de rayon 3.

1 - a) Montrons que $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ et vérifions que $x + y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan (OAB). .

1 pt

On a : $\overrightarrow{OA} = (x_A - x_O)\vec{i} + (y_A - y_O)\vec{j} + (z_A - z_O)\vec{k}$

donc $\overrightarrow{OA} = (-1-0)\vec{i} + (1-0)\vec{j} + (0-0)\vec{k}$

D'où : $\overrightarrow{OA}(-1,1,0)$

On a : $\overrightarrow{OB} = (x_B - x_O)\vec{i} + (y_B - y_O)\vec{j} + (z_B - z_O)\vec{k}$

donc $\overrightarrow{OB} = (1-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (1-0)\vec{k}$

D'où : $\overrightarrow{OB}(1,0,1)$

Donc $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$

Alors $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = (1 \times 1 - 0 \times 0)\vec{i} - (-1 \times 1 - 1 \times 0)\vec{j} + (-1 \times 0 - 1 \times 1)\vec{k}$

D'où : $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$

Soit $M(x,y,z)$ un point $\in (ABC)$

On a $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normale à (OAB)

Donc $(OAB) : 1x + 1y - 1z + d = O$ et puisque $O(0,0,0) \in (OAB)$

alors $(OAB) : 1 \times 0 + 1 \times -1 \times +d = O$ donc $d = O$

D'où $(OAB) : x + y - z = 0$

b) Vérifions que $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ puis montrons que le plan (OAB) coupe la sphère(S) suivant un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{6}$. **1 pt**

On a : $(OAB): x+y-z=0$ et $\Omega(1,1;-1)$ donc :

$d(\Omega,(OAB))=\dfrac{|1+1+(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

D'où : $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$

On a : $d(\Omega,(OAB))=\sqrt{3}$ et $R=3$ donc $d(\Omega,(OAB))<R$ donc le plan (OAB) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r=\sqrt{3^2-\sqrt{3}^2}=\sqrt{9-3}=\sqrt{6}$

D'où le plan (OAB) coupe la sphère(S) suivant un cercle (Γ) de rayon $r=\sqrt{6}$.

2 - Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et perpendiculaire au plan (OAB)

a) Démontrons que : $\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 1+t \\ z &= -1-t \end{cases}$ (t R)*est une reprsentation paramtrique de la droite* ( ) .

Ona ( ) *estperpendiculaireauplan* (OAB) *etOna* $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normale à (OAB) donc $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite à (Δ)

On a (Δ) passe par $\Omega(1;1;-1)$ et Soit $M(x,y,z)\in(\Delta)$ donc

$\begin{cases} x &= x_\Omega+1\times t \\ y &= y_\Omega+1\times t \\ z &= z_\Omega+(-1)\times t \end{cases}$ (t R)

Exercice 2 : (3 pts)

On considère, dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points A,B et C d'affixes respectives a,b et c tel que : $a=7+2i$, $b=4+8i$ et $c=-2+5i$.

1b) a) Vérifions que : $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ et montrons que : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$. **0.75 pt**

On a : $(1+i)(-3+6i)=-3+6i-3i-6=-9+3i$

On a : $\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{-2+5i-(7+2i)}{4+8i-(7+2i)}=\dfrac{-2+5i-7-2i}{4+8i-7-2i}=\dfrac{-9+3i}{-3+6i}$

On a : $(1+i)(-3+6i)=-9+3i$ alors $\dfrac{-9+3i}{-3+6i}=1+i$

D'où $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$

b) En déduire que :$AC=\sqrt{2}\ AB$ et donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$. **1 pt**

On a : $\dfrac{c-a}{b-a}=1+i$ Alors $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right|=|1+i|$ donc $\dfrac{|c-a|}{|b-a|}=\sqrt{1^2+1^2}$

donc $\dfrac{AC}{AB}=\sqrt{2}$ d'où $AC=\sqrt{2}\ AB$.

Yassine Elamri

On a : $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$

On a : $\dfrac{c-a}{b-a} = 1+i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos(\dfrac{\pi}{4})+i\sin(\dfrac{\pi}{4})\right)$

donc : $arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

2 - Soit R la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

0.75 pt **a)** Montrer que l'affixe du point D image du point A par la rotation R est : $d = 10+11i$.

On a :

$$\begin{aligned} D = R(A) &\Leftrightarrow d-b = e^{i\frac{\pi}{2}}(a-b) \\ &\Leftrightarrow d = b+(a-b)i \qquad , car \quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ &\Leftrightarrow d = 4+8i+(7+2i-4-8i)i \\ &\Leftrightarrow d = 4+8i+i(3-6i) \\ &\Leftrightarrow d = 4+8i+3i+6 \\ &\Leftrightarrow d = 10+11i \end{aligned}$$

D'où $d = 10+11i$

0.5 pt **b)** Calculer $\dfrac{d-c}{b-c}$ et en déduire que les points B, C et D sont alignés.

On a : $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{10+11i+2-5i}{4+8i+2-5i} = \dfrac{12+6i}{6+3i} = 2\times\dfrac{6+3i}{6+3i} = 2$

On a : $\dfrac{d-c}{b-c} = 2 \in R$ donc les points B, C et D sont alignés

Yassine Elamri

Exercice 3 : : (3 pts)

Une urne contient 10 boules indiscernables au toucher : cinq boules rouges, trois boules vertes et deux boules blanches.
On tire au hasard, simultanément, quatre boules de l'urne.

1 - Soient les deux événements suivants :
A : Tirer deux boules rouges et deux boules vertes
B : Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées

1.5 pt Montrer que : $P(A) = \frac{1}{7}$ et $P(B) = \frac{1}{3}$.

On tire au hasard et simultanément quatre boules de l'urne donc

$$Card(\Omega) = C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210$$

On a : $Card(A) = C_5^2 \times C_3^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} \times \frac{3!}{2!(3-2)!} = 10 \times 3 = 30$

D'où $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{30}{210} = \frac{1}{7}$.

On a : $Card(B) = C_8^4 = \frac{8!}{4!(8-4)!} = 70$

D'où $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées.

0.25 pt **a)** Vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire Xsont :0, 1 et 2..
Parmi les quatre boules tirées, on peut avoir les cas suivants :
- ☐ Cas 1 : Aucune boule blanche tirée, donc X = 0.
- ☐ Cas 2 : Une seule boule blanche tirée, donc X = 1.
- ☐ Cas 3 : Deux boules blanches tirées, donc X = 2.

Et puisque la caisse contient seulement 2 boules blanches.
D'où les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2

1.25 pt **b)** Montrer que $P(X = 1) = \frac{8}{15}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

On a : $P(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_8^3}{210} = \frac{2 \times 56}{210} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$

D'où $P(X = 1) = \frac{8}{15}$

On a : $P(X = 0) = P(B) = \frac{1}{3}$

D'où $P(X = 0) = \frac{1}{3}$

On a : $P(X = 2) = \frac{C_2^2 \times C_8^2}{210} = \frac{1 \times 28}{210} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$

D'où $P(X = 2) = \frac{2}{15}$

$X = k$	0	1	2
$P(X = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

D'où .P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=1

Yassine Elamri

Exercice 4 : : (3 pts)

Soit $(U_n)_{n\in N^*}$ la suite numérique définie par : $U_1 = 0$ et $U_{n+1} = \dfrac{25}{10-U_n}$ pour tout n de N^*.

1 - Vérifier que : $5 - U_{n+1} = \dfrac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$ pour tout n de N^* et montrer par récurrence que $5 - U_n > 0$ pour tout n de N^*. **1 pt**

On a : $5 - U_{n+1} = 5 - \dfrac{25}{10-U_n} = \dfrac{5(10-U_n)-25}{10-U_n} = \dfrac{50-5U_n-25}{5+5-U_n} = \dfrac{25-5U_n}{5+(5-U_n)}$

donc $5 - U_{n+1} = \dfrac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$

D'où $5 - U_{n+1} = \dfrac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)}$ pour tout n de N^* .

☐ Pour $n = 1$ on a $5 - u_1 = 5 - 0 = 5 > 0$ donc la propriété $(5 - U_n > 0)$ est vraie pour $n = 1$.
☐ soit $n \in N^*$ supposons que $5 - U_n > 0$ et montrons que $5 - U_{n+1} > 0$.
☐ On a $5 - U_n > 0$ donc $5 + (5 - U_n) > 5 > 0$ et $5(5 - U_n) > 0$ donc $\dfrac{5(5-U_n)}{5+(5-U_n)} > 0$

D'où $5 - U_{n+1} > 0$.

D'après le principe de récurrence $5 - U_n > 0$ pour tout n de N^* .

2 - On considère la suite numérique $(V_n)_{n\in N^*}$ définie par :$V_n = \dfrac{5}{5-U_n}$ pour tout n de N^*.

a) Montrer que :$V_{n+1} = \dfrac{10-U_n}{5-U_n}$pour tout n de N^* et vérifier que :$V_{n+1} - V_n = 1$ pour tout n de N^*. **0.75 pt**

On a : $V_{n+1} = \dfrac{5}{5-U_{n+1}} = \dfrac{5}{\dfrac{25-5U_n}{10-U_n}} = \dfrac{5(10-U_n)}{25-5U_n} = \dfrac{5(10-U_n)}{5(5-U_n)} = \dfrac{10-U_n}{5-U_n}$

D'où $V_{n+1} = \dfrac{10-U_n}{5-U_n}$ pour tout n de N^*..

On a : $V_{n+1} - V_n = \dfrac{10-U_n}{5-U_n} - \dfrac{5}{5-U_n} = \dfrac{10-U_n-5}{5-U_n} = \dfrac{5-U_n}{5-U_n} = 1$

D'où $V_{n+1} - V_n = 1$ pour tout n de N^*.

b) Montrer que : $V_n = n$ pour tout n de N^* et en déduire que :$U_n = 5 - \dfrac{5}{n}$ pour tout n de N^* . **1 pt**

On a : $V_{n+1} - V_n = 1$ pour tout n de N^* donc (V_n) est une suite athématique de raison $r = 1$ et de premier terme $V_1 = \dfrac{5}{5-U_1} = \dfrac{5}{5-0} = 1$

donc $V_n = V_1 + (n-1) \times 1 = 1 + n - 1 = n$

D'où $V_n = n$ pour tout n de N^* .

On a :$V_n = \dfrac{5}{5-U_n}$ pour tout n de N^* donc $5 - U_n = \dfrac{5}{V_n}$ donc $U_n = 5 - \dfrac{5}{V_n}$

D'où $U_n = 5 - \dfrac{5}{n}$ pour tout n de N^*.

c) Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **0.25 pt**

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} U_n = 5$

Yassine Elamri

Exercice 5 : : (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-2)^2 e^x$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : $1cm$)

0.25 pt **1 - a)** Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ puis en déduire que la courbe (C) admet, au voisinage **0.25 pt** de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction .

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-2)^2 e^x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-2)^2 \times \dfrac{e^x}{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

donc (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$de direction l'axe des ordonnées

0.25 pt **2 - a)** Vérifier que $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

0n a : $f(x) = (x-2)^2 e^x = (x^2 - 4x + 4)e^x = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$

D'où $f(x) = x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et interpréter géométriquement ce résultat.

(On rappelle que $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$ pour tout n de N^*) **0.25 pt**

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x - 4xe^x + 4e^x$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = \lim\limits_{x\to-\infty} -4xe^x = \lim\limits_{x\to-\infty} 4e^x = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$.

0.25 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, On a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x-2)^2\right)' e^x + (x-2)^2 (e^x)' \\ &= 2(x-2)'(x-2)^{2-1} + e^x(x-2)^2 \\ &= 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x \\ &= e^x(x-2)(2+x-2) \\ &= e^x(x-2)(x) \\ &= x(x-2)e^x \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = x(x-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b) Montrer que la fonction f est croissante sur chacun des deux intervalles $]-\infty;0]$ et $[2;+\infty[$ **0.25 pt** et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$.

On a $f'(x) = x(x-1)e^x$ et $e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ donc le signe de f' est celui de $x(x-1)$.

Yassine Elamri

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
x		$-$	0	$+$			
$x-2$			$-$		0	$+$	
$x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in]-\infty;0] \cup [2;+\infty[\quad$ et $\quad f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0;2]$

D'où f est croissante sur $]-\infty;0]$ et sur $[2;+\infty[$ et décroissante sur $[0;2]$

0.25 pt **c)** Dresser le tableau de variations de la fonction f sur R.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	4	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
	0				0		

4 - **a)** **0.25 pt** Montrer $f''(x) = (x^2-2)e^x$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire que la courbe (C) possède deux points d'inflexions qu'on ne demande pas de déterminer leurs ordonnées.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = x(x-2)e^x = (x^2-2x)e^x \quad$ donc

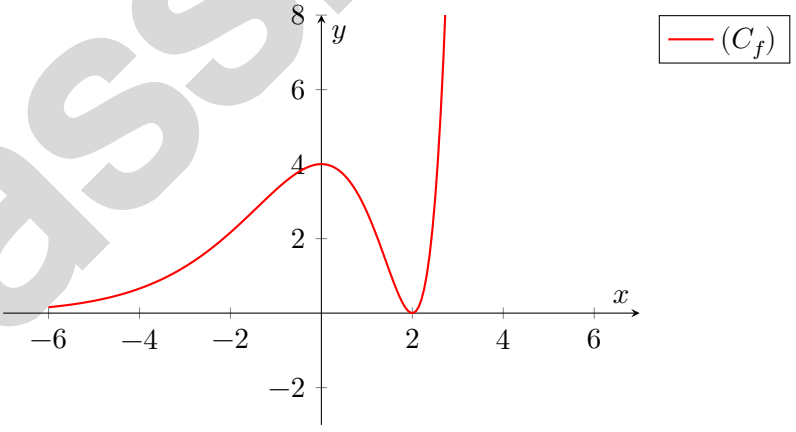
$$\begin{aligned} f''(x) &= ((x^2-2x))'e^x + (e^x)'(x^2-2x) \\ &= (2x-2)e^x + e^x(x^2-2x) \\ &= e^x(2x-2+x^2-2x) \\ &= (x^2-2)e^x \\ &= (x^2-2)e^x \end{aligned}$$

On a : $f''(x) = 0 \iff x^2-2$, car $e^x > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

donc $f''(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \quad$ ou $\quad x = -\sqrt{2}$

D'où (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses respectifs $x = -\sqrt{2}$ et $x = \sqrt{2}$

0.25 pt **b)** Construire (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



5 - **a)** **0.25 pt** Montrer que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur R puis calculer $\int_0^1 xe^x \, dx$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $H'(x) = ((x-1)e^x)' = (xe^x - x)' = x'e^x + x(e^x)' - (e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \ , \quad H'(x) = h(x)$.

Yassine Elamri

D'où $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$.

On a : $\int_O^1 xe^x \, dx = \int_O^1 h(x) \, dx = [H(x)]_0^1 = [(x-1)e^x]_0^1 = ((1-1)e^1) - ((0-1)e^0) = 1$

D'où $\int_O^1 xe^x \, dx = 1$

0.25 pt

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_O^1 x^2 e^x \, dx = e - 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On pose : $U(x) = x^2$ $\quad (U(x))' = 2x$

$(V(x))' = e^x$ $\quad V(x) = e^x$

Donc $\int_O^1 x^2 e^x \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_O^1 2xe^x \, dx = (1^2 e^1) - (0^2 e^0) - 2 \times 1 = e - 2$.

D'où $\int_O^1 x^2 e^x \, dx = e - 2$

0.25 pt

c) Montrer que l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations$x = 0$ et $x = 1$ est égale à $5(e-2)cm^2$.

Soit A l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations$x = 0$ et $x = 1$.

On a :$A = (\int_O^1 f(x) \, dx)cm^2$

On a : $\int_O^1 f(x) \, dx = \int_O^1 x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x \, dx = \int_O^1 x^2 e^x \, dx - 4\int_O^1 xe^x \, dx + 4\int_O^1 e^x \, dx =$
$(e-2) - 4 \times 1 + 4\,[e^x]_0^1 = e - 2 - 4 + 4(e^1 - e^0) = e - 6 + 4(e-1) = e - 6 + 4e - 4 =$
$5e - 10 = 5(e-2)$.

D'où $A = 5(e-2)cm^2$

0.25 pt

6 - Utiliser la courbe pour donner le nombre de solutions de l'équation : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$, $x \in R$.

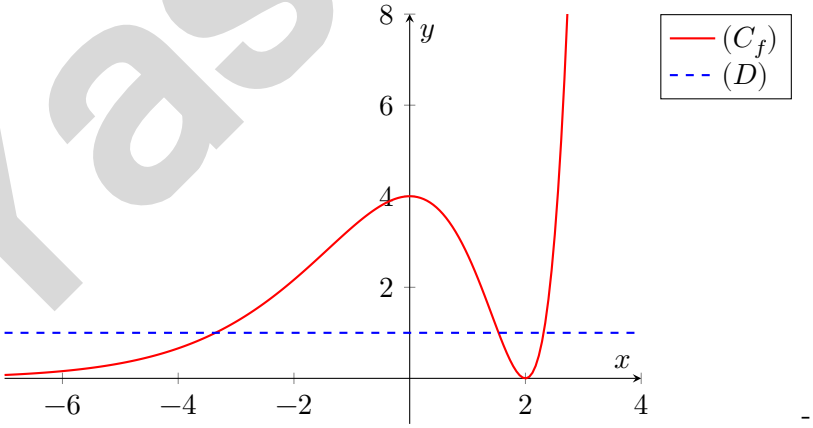
Soit $x \in \mathbb{R}$.

On a : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4 \iff x^2 - 4x + 4 = e^{-x} \iff e^x \times (x^2 - 4x + 4) = e^x \times e^{-x} \iff f(x) = 1$
.

Le nombre des solutions de l'équation $f(x) = 1$ est égale aux nombre de point d'intersection entre la courbe (C_f) et la droite (D) d'équation $y = 1$.

Or La droite (D) coupe la courbe (C_f) en 3 points donc L'équation $f(x) = 1$ admet 3 solutions
.

D'où l'équation : $x^2 = e^{-x} + 4x - 4$ admet 3 solutions sur $\mathbb{R}$



FIN

Yassine Elamri

T r than yesterday, tomorrow better than today