ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2012

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, On considère :

- Les points : $\boxed{A(1,1,-1)}$ $\boxed{B(0,1,-2)}$ $\boxed{C(3,2,1)}$
- La sphère $(\mathcal{S})$ d'équation cartésienne : $\boxed{x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0}$.

0.5 pt **1 -** Montrons que la sphère $(\mathcal{S})$ est de centre $\Omega(1,0,1)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$.

On a $(\mathcal{S})$: $x^2+y^2+z^2-2x-2z-1=0$

Donc $(\mathcal{S})$: $(x^2-2x+1)-1+y^2+(z^2-2z+1)-1-1=0$

Donc $(\mathcal{S})$: $(x-1)^2+(y-0)^2+(z-1)^2=3$

Et par suite : le centre de la sphère $(\mathcal{S})$ est $\Omega(1,0,1)$ et le rayon est $R=\sqrt{3}$

0.75 pt **2 - a)** • Montrons que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}$:

On a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A) \Longrightarrow \overrightarrow{AB}(-1,0,-1)$

Et on a $\overrightarrow{AC}(x_C-x_A, y_C-y_A, z_C-z_A) \Longrightarrow \overrightarrow{AC}(2,1,2)$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$

Donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=((0\times 2)-(-1\times 1))\vec{i}-((-1\times 2)-(-1\times 2))\vec{j}+((-1\times 1)-(0\times 2))\vec{k}$

Ce qui donne $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(0-(-1))\vec{i}-((-2)-(-2))\vec{j}+((-1)-0)\vec{k}$

Et par suite : $\boxed{\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{k}}$

• Vérifions que $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$:

▶ Méthode 1 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ Alors les points A, B et C ne sont pas alignées donc ils forment un UNIQUE plan $(\mathcal{ABC})$ Or On a : $\begin{cases} x_A-z_A-2 = 1-(-1)-2=0\\ x_B-z_B-2 = 0-(-2)-2=0\\ x_C-z_C-2 = 3-1-2=0\end{cases}$

Today better than yesterhttps://steinmath.comer than today

Donc $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$.

▶ Méthode 2 : On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ Alors les points A, B et C ne sont pas alignées

Donc ils forment un plan $(\mathcal{ABC})$ qui a comme vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$.

Et donc l'équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$ s'écrit sous la forme $(\mathcal{ABC}): x-z+d=0$.

Or B$\in(\mathcal{ABC})$ donc $x_B-z_B+d=0$ donc $d=z_B-x_B=-2-0$ donc $d=-2$

Et par suite : $x-z-2=0$ est une équation cartésienne du plan $(\mathcal{ABC})$.

1 pt **b)** • Vérifions que $d(\Omega,(\mathcal{ABC}))=\sqrt{2}$:

On a $d(\Omega,(\mathcal{ABC}))=\dfrac{|x_\Omega-z_\Omega-2|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}}=\dfrac{|1-1-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|-2|}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

• Déduisons que le plan $(\mathcal{ABC})$ coupe la sphère $(\mathcal{S})$ selon un cercle (Γ) de rayon 1 :

On a $d(\Omega,(\mathcal{ABC}))=\sqrt{2}<R=\sqrt{3}$

Donc le plan $(\mathcal{ABC})$ coupe la sphère $(\mathcal{S})$ selon un cercle (Γ) de rayon r,

Avec $r=\sqrt{R^2-[d(\Omega,(\mathcal{ABC}))]^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2}=\sqrt{3-2}=\sqrt{1}=1$

3 - Soit (Δ) la droite qui passe par le point Ω et perpendiculaire au plan $(\mathcal{ABC})$:

0.25 pt **a)** Montrons que $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de (Δ) :

On a $(\Delta)\perp(\mathcal{ABC})$

Donc tout vecteur normal au plan $(\mathcal{ABC})$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

ce qui signifie que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,0,-1)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Or $\Omega(1,0,1)\in(\Delta)$

Alors la représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 0 \\ z = 1-t \end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$

0.25 pt **b)** Montrons que $H(2,0,0)$ est le point d'intersection de la droite (Δ) et le plan $(\mathcal{ABC})$:

On a $H=(\Delta)\cap(\mathcal{ABC})$ Donc $H\in(\Delta)$ et $H\in(\mathcal{ABC})$

Donc $(\exists t\in\mathbb{R})$ tel que $\begin{cases} x_H = 1+t \\ y_H = 0 \\ z_H = 1-t \\ x_H-z_H-2 = 0 \end{cases}$ $\Longrightarrow 1+t-(1-t)-2=0$

Ce qui donne $2t-2=0$ Donc $t=1$ Et par suite $\begin{cases} x_H = 2 \\ y_H = 0 \\ z_H = 0 \end{cases}$ SQFD

0.25 pt **c)** Déduisons le centre du cercle (Γ) :

On Sait que le centre du cercle (Γ) est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan $(\mathcal{ABC})$

Or $\Omega\in(\Delta)$ et $(\Delta)\perp(\mathcal{ABC})$ Alors $(\Delta)\cap(\mathcal{ABC})=H$ est le centre du cercle (Γ).

Yassine Elamri

Exercice 2 : (3 pts)

0.75 pt **1 -** résoudrons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 12z + 61 = 0$:

Calculons le discriminant Δ : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 61 = 144 - 244 = -100 < 0$

Donc l'équation admet deux solutions complexes z_1 et z_2 avec :
$z_1 = \dfrac{-(-12) - i\sqrt{100}}{2} = \dfrac{12 - 10i}{2} = 6 - 5i$ et $z_2 = \bar{z_1} = 6 + 5i$
Et par suite $S = \{6 - 5i, 6 + 5i\}$

2 - Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, On considère les points A, B ,et C d'affixes respectives $a = 6 - 5i$, $b = 4 - 2i$, et $c = 2 + i$

0.5 pt **a)** • Calculons $\dfrac{a-c}{b-c}$:
On a $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{6 - 5i - (2+i)}{4 - 2i - (2+i)} = \dfrac{6 - 5i - 2 - i}{4 - 2i - 2 - i} = \dfrac{4 - 6i}{2 - 3i} = \dfrac{2(2 - 3i)}{2 - 3i} = 2$
• Déduisons que les points A, B et C sont alignés :
On a $\dfrac{a-c}{b-c} = 2 \in \mathbb{R}^*$ Alors les points A, B et C sont alignés.

0.5 pt **b)** On considère la translation T de vecteur $\vec{u}$ tel que l'affixe de $\vec{u}$ est 1 + 5i :
• Vérifions que l'affixe du point D image du point C par la translation T est d = 3 + 6i :
On sait que Si $M(z)$ et $M'(z')$ deux points tels que $T(M) = M'$ Alors $z = z' + aff(\vec{u})$
Or on a $T(C) = D$ et $aff(\vec{u}) = 1 + 5i$ Alors $d = c + 1 + 5i$
Donc d=2+i+1+5i Et par suite d=3+6i.

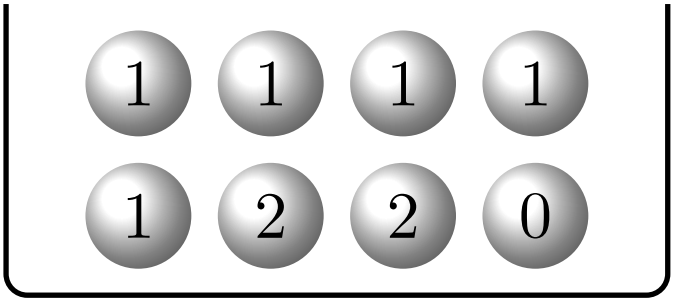
c) • Montrons que $\dfrac{d-c}{b-c} = -1 + i$
On a $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{3 + 6i - 2 - i}{4 - 2i - 2 - i} = \dfrac{1 + 5i}{2 - 3i} = \dfrac{(1+5i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{2 + 3i + 10i - 15}{2^2 + 3^2}$
Donc $\dfrac{d-c}{b-c} = \dfrac{-13 + 13i}{13} = -1 + i$
• Montrons que $arg(-1 + i) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$
On a $-1 + i = -(1 - i) = -(\overline{1 + i})$
On sait que $(\forall a, b, c \in \mathbb{C}^*)$ $a = bc \Longrightarrow arg(a) \equiv arg(b) + arg(c)[2\pi]$
Donc $arg(-1 + i) \equiv arg(-1) + arg(\overline{1 + i})[2\pi]$
Or $arg(-1) \equiv \pi[2\pi]$ Et $arg(\overline{1 + i}) \equiv -arg(1 + i)[2\pi]$
Alors $arg(-1 + i) \equiv \pi - arg(1 + i)[2\pi]$
Et On a $|1 + i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$ Donc $1 + i = \sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \sqrt{2}(cos(\dfrac{\pi}{4}) + isin(\dfrac{\pi}{4}))$
Donc $arg(1 + i) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ Donc $arg(-1 + i) \equiv \pi - \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
Et par suite $arg(-1 + i) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$.

d) Déduisons une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$:
On sait que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv arg(\dfrac{d-c}{b-c})[2\pi]$ et que d'après ce qui précède $\dfrac{d-c}{b-c} = -1 + i$
Donc $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv arg(-1 + i)[2\pi]$
Et par suite $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$

Yassine Elamri

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient huit boules indiscernables au toucher : une boule portant le nombre 0, cinq boules portant chacune le nombre 1 et deux boules portant chacune le nombre 2 On tire au hasard, et simultanément, trois boules de l'urne :



1 pt **1 -** Soit A l'événement : " Les trois boules tirées portent des nombres différents deux à deux ".

Montrons que : $p(A) = \frac{5}{28}$:

On a les boules sont indiscernables au toucher, et le tirage est au hasard,

Donc nous somme dans une situation d'équiprobabilité,

Et Donc la probabilité de chaque événement K est $p(K) = \frac{card(K)}{card(\Omega)}$.

Donc $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$.

Or l'expérience aléatoire consiste à tirer 3 boules simultanément parmi 8 au total dans l'urne,

Donc le nombre total des possibilités est une combinaison de 3 éléments parmi 8 éléments.

Et par suite $card(\Omega) = C_8^3 = 56$.

On a l'événement A : " Les trois boules tirées portent des nombres différents deux à deux ".

Donc il faut tirer une boule portant 0 et une boule portant 1 et une boule portant 2

CÀD $A \iff$ "012" et l'ordre n'est pas important car le tirage est en même temps.

Donc $card(A) = C_1^1 \times C_5^1 \times C_2^1 = 5 \times 2 = 10$

Et par suite $p(A) = \frac{10}{56} = \frac{5}{28}$

1 pt **2 -** Soit B l'événement : " La somme des nombres portés par les boules tirées est égale à 5 ".

Montrons que : $p(B) = \frac{5}{56}$:

de la même manière on a $p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$.

Or la seule possibilité pour que l'événement B soit réalisé est de tirer 2 boules portant 2 et une boule portant 1 CÀD $B \iff$ "122" et l'ordre n'est pas important.

Donc $p(B) = \frac{C_5^1 \times C_2^2}{56} = \frac{5}{56}$.

1 pt **3 -** Soit C l'événement : "La somme des nombres portés par les boules tirées est égale à 4 ".

Montrons que : $p(C) = \frac{3}{8}$

On a $p(C) = \frac{card(C)}{card(\Omega)}$, On a 2 cas possibles pour que l'événement C soit réalisé

Cas 1 : "tirer 2 boules portant 2 et une boule portant 0" et l'ordre n'est pas important.

Yassine Elamri

OU

Cas 2 : "tirer 2 boules portant 1 et une boule portant 2" et l'ordre n'est pas important.

Donc $p(C) = \dfrac{card(C)}{card(\Omega)} = \dfrac{C_1^1 \times C_2^2 + C_5^2 \times C_2^1}{56}$

Donc $p(C) = \dfrac{1+20}{56} = \dfrac{21}{56}$

Et par suite $p(C) = \dfrac{3}{8}$.

Exercice 4 : (3 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 11$ et $u_{n+1} = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt **1 -** Vérifions que : $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a : $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11} - 12 = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11} - \dfrac{12 \times 11}{11}$

Donc $u_{n+1} - 12 = \dfrac{1}{11}(10u_n + 12(1-11)) = \dfrac{1}{11}(10u_n - 12 \times 10)$

Et par suite $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **2 - a)** Montrons par récurrence que : $u_n < 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

- Initialisation : Pour $n = 0$ On a $u_0 = 11 < 12$.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose que $u_n < 12$ et Montrons que : $u_{n+1} < 12$:

On a d'après la question précédente $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$

Or $u_n < 12$ Donc $u_n - 12 < 0$ Et puisque $\dfrac{10}{11} > 0$ Alors $u_{n+1} - 12 < 0$ SQFD.

- Conclusion : On a $u_0 < 12$ et On a $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 12 \Longrightarrow u_{n+1} < 12$.

Donc d'après le principe de récurrence $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n < 12$.

0.5 pt **b)** Montrons que la suite (u_n) est croissante :

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{10}{11}u_n + \dfrac{12}{11} - u_n = (\dfrac{10}{11} - \dfrac{11}{11})u_n + \dfrac{12}{11}$

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-1}{11}u_n + \dfrac{12}{11} = \dfrac{-1}{11}(u_n - 12)$.

Or d'après la question précédente on a $u_n - 12 < 0$ et puisque $\dfrac{-1}{11} < 0$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n > 0$

Et par suite la suite (u_n) est strictement croissante donc la suite (u_n) est croissante.

0.25 pt **c)** Déduisons que la suite (u_n) est convergente :

On a la suite (u_n) est majorée par 12 [Q 2 - a] Et croissante [Q 2 - b]

Donc la suite (u_n) est convergente .

3 - Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 12$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) • En utilisant la question 1), montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{11}{12}$:

0.75 pt

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{u_{n+1} - 12}{u_n - 12}$.

Et d'après la question 1) On a $u_{n+1} - 12 = \dfrac{10}{11}(u_n - 12)$ Donc $\dfrac{u_{n+1} - 12}{u_n - 12} = \dfrac{11}{12}$

Yassine Elamri

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = \dfrac{11}{12}$ Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{11}{12}$.

• Écrirons v_n en fonction de n : On a (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{11}{12}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = v_0 \times \left(\dfrac{11}{12}\right)^{n-0}$ Or $v_0 = u_0 - 12 = 11 - 12 = -1$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = -\left(\dfrac{11}{12}\right)^n$

0.75 pt **b)** • Montrons que $u_n = 12 - \left(\dfrac{11}{12}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$:

On a $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = u_n - 12$ Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 12 + v_n$

Or d'après la question précédente $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = -\left(\dfrac{11}{12}\right)^n$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = 12 - \left(\dfrac{11}{12}\right)^n$.

• Déduisons la limite du suite (u_n) :

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 12 - \left(\dfrac{11}{12}\right)^n$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{11}{12}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{11}{12} < 1$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12$.

Exercice 5 : (8 pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x$

0.75 pt **1 -** • Montrons que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0;1[$

▶ On a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ Donc le tableau de signe de $x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc d'après ce tableau $x^2 - 1$ est négative strictement sur $]0;1[$.

▶ On a $2x^2 > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]0;1[$. Or $\ln x < 0$ sur $]0;1[$

Donc $2x^2 \ln x$ est négative strictement $]0;1[$.

Et par suite $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ sont les deux négative strictement sur l'intervalle $]0;1[$.

• Déduisons que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$:

On a $\forall x \in]0;1[\ 2x^2 \ln x < 0$ et $x^2 - 1 < 0$

Donc $\forall x \in]0;1[\ g(x) = x^2 - 1 + 2x^2 \ln x < 0$

Et on a $g(1) = 0$ Donc $\forall x \in]0;1]\ g(x) \leq 0$

0.75 pt **2 -** • Montrons que : $x^2 - 1$ et $2x^2 \ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1;+\infty[$

On a d'après le tableau de signe précédent $x^2 - 1$ est positive strictement sur $]1;+\infty[$.

Or $\ln x > 0$ sur $]1;+\infty[$ Donc $2x^2 \ln x$ est positive strictement $]1;+\infty[$.

Yassine Elamri

Et par suite x^2-1 et $2x^2\ln x$ sont les deux positive strictement sur l'intervalle $]1;+\infty[$.

• Déduisons que $g(x)\geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$:

On a $\forall x\in\,]1;+\infty[\ 2x^2\ln x>0$ et $x^2-1>0$

Donc $\forall x\in\,]1;+\infty[\ g(x)=x^2-1+2x^2\ln x>0$

Et on a $g(1)=0$ Donc $\forall x\in[1;+\infty[\ g(x)\geq 0$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=(x^2-1)\ln x$.

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$(unité : $3cm$)

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$, Puis interprétons le résultat géométriquement :

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x^2-1=-1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x=-\infty$

Or $f(x)=(x^2-1)\ln x$ Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$.

interprétation géométrique : (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$ (c'est l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$).

0.5 pt **b)** • Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-1)\ln x=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

• Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x^2-1)\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x=+\infty$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

• Déduisons que la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$:

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ Donc (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$.

1.25 pt **2 - a)** • Montrons que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$

On a $x\mapsto x^2-1$ est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $]0;+\infty[$. et on a $x\mapsto\ln x$ est dérivable sur $]0;+\infty[$.

Donc f est une fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$

Et on a $\forall x\in\,]0;+\infty[\ f'(x)=((x^2-1)\ln x)'$

Donc $\forall x\in\,]0;+\infty[\ f'(x)=(x^2-1)'\ln x+(x^2-1)(\ln x)'$

Donc $\forall x\in\,]0;+\infty[\ f'(x)=2x\ln x+(x^2-1)\dfrac{1}{x}=2x\ln x+\dfrac{x^2}{x}-\dfrac{1}{x}$

Donc $\forall x\in\,]0;+\infty[\ f'(x)=2x\ln x+x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}(2x^2\ln x+x^2-1)$

Or on a $g(x)=x^2-1+2x^2\ln x$ Donc $\forall x\in\,]0;+\infty[\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$

• Interpréter géométriquement le résultat $f'(1)=0$:

Yassine Elamri

On a $f'(1) = \dfrac{g(1)}{1} = \dfrac{1-1+\ln 1}{1} = 0$

Donc (C) admet une tangente horizontale au point $M(1, f(1))$ avec $f(1) = 0$.

b) Montrons que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$ et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$: **0.5 pt**

On a $\forall x \in]0;+\infty[\ f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ Donc le signe de f' est celui de g (car $x > 0$).

Or d'après la partie I on a $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;1]$ Et $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$:

Donc $\forall x \in]0;1]\ f'(x) \leq 0$ Et $\forall x \in [1;+\infty[\ f'(x) \geq 0$

Ce qui signifie que la fonction f est décroissante sur l'intervalle $]0;1]$, et croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

c) • Dressons le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$: **0.5 pt**

D'après ce qui précède on a le le tableau de variations f suivant :

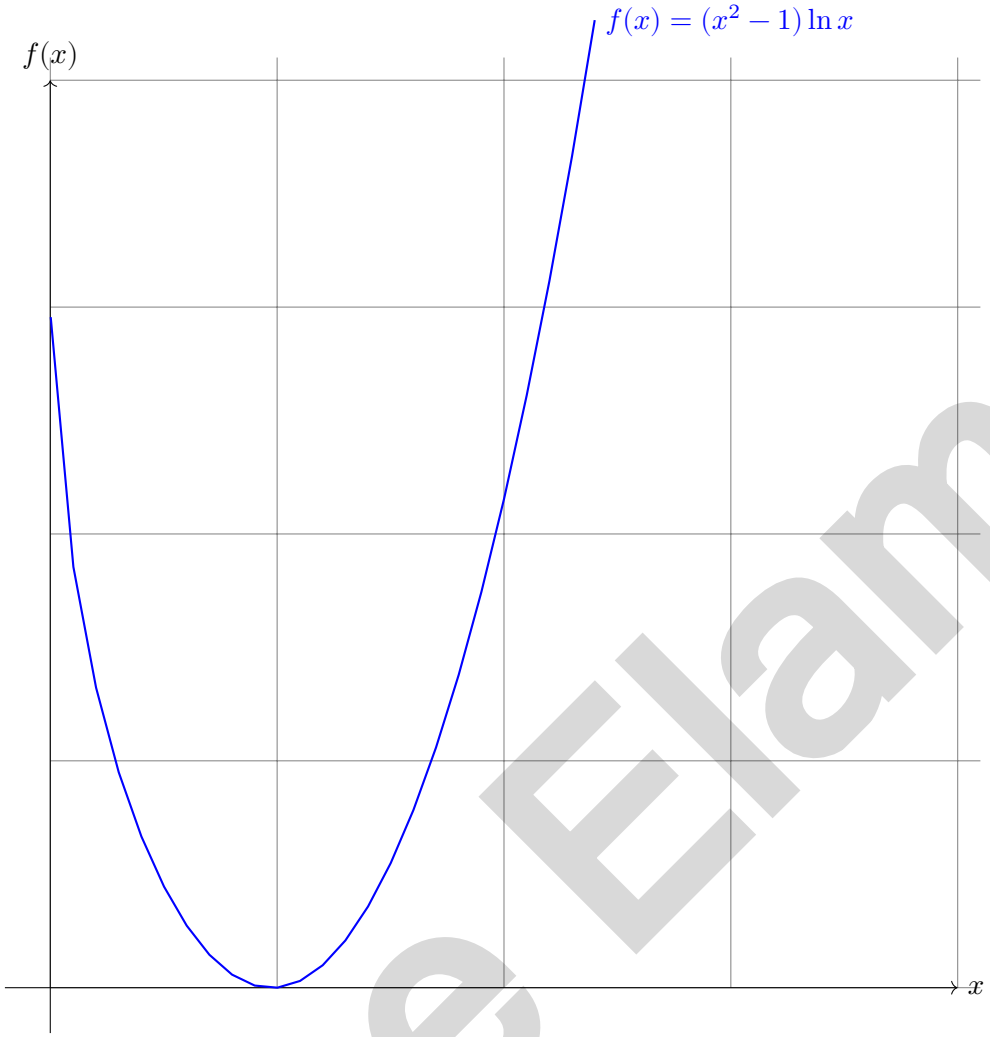
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

• montrons que $f(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$:

D'après le tableau de variations de f ci-dessus On a le point M(1,0) est un minimum sur l'intervalle $]0;+\infty[$.Ce qui signifie que $\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) \geq 0$.

3 - Construisons la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$(unité : $3cm$) : **1 pt**

Yassine Elamri



0.5 pt **4 - a)** montrons que $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$:

On a u est une fonction polynômiale donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$,

Et on a $\forall x \in \mathbb{R}\ u'(x) = (\dfrac{x^3}{3} - x)' = \dfrac{3}{3}x^{3-1} - 1 = x^2 - 1$

Et par suite $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$

1 pt **b)** Montrons à l'aide d'une intégration par partie, que : $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x \mathrm{d}x = \frac{2}{9}(1 + 3\ln 2)$:

On a f est dérivable sur $]0; +\infty[$

Donc elle continue sur $]0; +\infty[$ et en particulier sur $[1; 2]$.

Et par suite l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 (x^2 - 1)\ln x \mathrm{d}x$ existe.

On pose $\begin{cases} v'(x) = x^2 - 1 \\ w(x) = \ln x \end{cases}$ Donc D'après Q 4-a $\begin{cases} v(x) = \dfrac{x^3}{3} - x \\ w'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

Donc par une intégration par partie On a :

Yassine Elamri

$$\begin{aligned}
\int_1^2 (x^2-1)\ln x\,\mathrm{d}x &= \left[\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\left(\frac{2^3}{3}-2\right)\ln 2 - \left(\frac{1^3}{3}-1\right)\ln 1\right) - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}-1\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{8}{3}-2\right)\ln 2 - \left[\frac{x^3}{9}-x\right]_1^2 \quad \boxed{\textbf{Car } \left(\frac{x^3}{9}-x\right)' = \frac{x^2}{3}-1 \textbf{ sur } [1;2]} \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{2^3}{9}-2-(\frac{1^3}{9}-1)\right) \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{8}{9}-2-\frac{1}{9}+1\right) \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 - \left(\frac{7}{9}-1\right) = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{-2}{9} \\
&= \frac{2}{3}\ln 2 + \frac{2}{9} \\
&= \frac{2}{9}(1+3\ln 2)
\end{aligned}$$

c) Calculons , en cm^2 $\mathcal{A}$ l'aire du domaine du plan limité par la courbe (C), l'axe du abscisse et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$: **0.25 pt**

On sait que $\mathcal{A} = \int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x \times ||\vec{i}|| \times ||\vec{j}|| = \int_1^2 |f(x)|\mathrm{d}x \times 3cm \times 3cm$

Or d'après la question 2-c) On a $\forall x \in]0;+\infty[\ f(x) \geq 0$.

Donc en particulier sur $[1;2]$ $|f(x)| = f(x) = (x^2-1)\ln x$

Donc $\mathcal{A} = \int_1^2 (x^2-1)\ln x\mathrm{d}x \times 9cm^2$

Or d'après la question précédente On a $\int_1^2 (x^2-1)\ln x\mathrm{d}x = \frac{2}{9}(1+3\ln 2)$

Donc $\mathcal{A} = \frac{2}{9}(1+3\ln 2) \times 9cm^2$

Et par suite : $\mathcal{A} = 2(1+3\ln 2)cm^2$

FIN

Yassine Elamri