ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologie

Session : Normal 2011

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 - a)** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $x^2+4x-5=0$

On a : $\Delta = 4^2-4\times1\times(-5)=36$, donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes.

$x_1=\dfrac{-4+\sqrt{36}}{2\times1}=1$ et $x_2=\dfrac{-4-\sqrt{36}}{2\times1}=-5$

D'où : $S=\{-5;1\}$

1 pt **b)** Résolvons dans $]0;+\infty[$ l'équation suivante : $\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln 2x$

On a $x\in]0,+\infty[$ donc $x>0$ donc $x^2+5>0$ et $x+2>0$ et $2x>0$

$\ln(x^2+5)=\ln(x+2)+\ln 2x \Leftrightarrow \ln(x^2+5)=\ln[(x+2)2x]$

$\Leftrightarrow x^2+5=(x+2)2x$

$\Leftrightarrow x^2+5=2x^2+4x$

$\Leftrightarrow x^2+4x-5=0$

Donc (d'après la question $1)a-$ $x=-5$ ou $x=1$, or $x>0$ donc $x=1$

D'où $S=\{1\}$

1 pt **2 -** Résolvons dans $]0;+\infty[$ l'inéquation suivante : $\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1)$

On a $x\in]0,+\infty[$ donc $x>0$ donc $x^2+1>0$ et $x+1>0$

$\ln x+\ln(x+1)\geq\ln(x^2+1) \Leftrightarrow \ln[x(x+1)]\geq\ln(x^2+1)$

$\Leftrightarrow x(x+1)\geq x^2+1$

$\Leftrightarrow x^2+x\geq x^2+1$

$\Leftrightarrow x\geq 1$

Or $x>0$. D'où $S=[1,+\infty[$

T than yesterday, tomorrow better than today

Exercice 2 : (3 pts)

Considérons la suite (U_n) définie par : $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{5+8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad$ et $\quad U_0 = 1$

0.5 pt

1 - Montrons que : $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

✓ Pour $n = 0$ on a $\quad U_0 = 1$ donc $U_0 > 0$

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$

On a $U_n > 0$ donc $8U_n > 0$ et $5 + 8U_n > 5 > 0$ donc $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{5+8U_n} > 0$

D'après le principe de démonstration par récurrence : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N};\quad U_n > 0}$

2 - Considérons la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1.5 pt

a) Montrons que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis exprimer V_n en fonction de n

Montrons que $V_{n+1} = 5V_n$.

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\dfrac{U_n}{5+8U_n}} + 2 = \frac{5+8U_n}{U_n} + 2$$

$$= \frac{5}{U_n} + \frac{8U_n}{U_n} + 2 = \frac{5}{U_n} + 8 + 2 = 5\left(\frac{1}{U_n} + 2\right)$$

D'où $V_{n+1} = 5V_n$

Alors $\boxed{(V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } 5}$ de premier terme $\boxed{V_0 = \dfrac{1}{U_0} + 2 = 3}$

En suite : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} : \quad V_n = V_0 \times 5^n = 3 \times 5^n}$

1 pt

b) Montrons que $U_n = \dfrac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et Déduisons $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} = V_n - 2$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n - 2}$$

$$\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$$

D'où $\boxed{U_n = \dfrac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3 \times 5^n - 2} = 0$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$ et $5 > 1$.

D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorhttps://steinmath.comday

Exercice 3 : (5 pts)

1 pt

1 - Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 - 18Z + 82 = 0$

On a $\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 82 = -4 = (2i)^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{18 + 2i}{2} = 9 + i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 9 - i$

D'où $\boxed{S = \{9 - i; 9 + i\}}$

2 - Considérons, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points $A(a = 9 + i)$, $B(b = 9 - i)$ et $C(c = 11 - i)$

1 pt

a) Montrons que : $\dfrac{c-b}{a-b} = -i$ puis déduisons que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

✓ On a $\dfrac{c-b}{a-b} = \dfrac{11 - i - 9 + i}{9 + i - 9 + i} = \dfrac{2}{2i} = \dfrac{1}{i}$

Donc $\boxed{\dfrac{c-b}{a-b} = -i}$

✓ On a $\dfrac{c-b}{a-b} = -i$ donc $\left|\dfrac{c-b}{a-b}\right| = |-i| \Leftrightarrow \dfrac{|c-b|}{|a-b|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{BC}{BA} = 1$ donc $BC = BA$

Et on a $\dfrac{c-b}{a-b} = \cos\dfrac{\pi}{2} - i\sin\dfrac{\pi}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Donc $\dfrac{c-b}{a-b} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

Or $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \arg\dfrac{c-b}{a-b}[2\pi]$, donc $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv -\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où $\boxed{\text{le triangle } ABC \text{ est isocèle et rectangle en } B}$

0.5 pt

b) Écrivons $4(1-i)$ sous forme trigonométrique.

On a $|4(1-i)| = 4|1-i| = 4\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} 4(1-i) &= 4\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

D'où $\boxed{4(1-i) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)}$

1 pt

c) Montrons que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis déduisons que $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

✓ On a $(c-a)(c-b) = (11 - i - 9 - i)(11 - i - 9 + i) = (2 - 2i)2 = 4(1-i)$

D'où $\boxed{(c-a)(c-b) = 4(1-i)}$

✓ On a $|(c-a)(c-b)| = |4(1-i)| \Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |(c-a)||(c-b)| = 4\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow AC \times BC = 4\sqrt{2}$

D'où $\boxed{AC \times BC = 4\sqrt{2}}$

Yassine Elamri

1.5 pt

d) Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$.

Montrons que : $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifions que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$.

✓ $R(M) = M' \Leftrightarrow z' - b = e^{i\frac{3\pi}{2}}(z - b)$

$\Leftrightarrow z' - b = (\cos(\frac{3\pi}{2}) + i\sin(\frac{3\pi}{2}))(z - b)$

$\Leftrightarrow z' = -i(z - 9 + i) + 9 - i$

$\Leftrightarrow z' = -iz + 9i + 1 + 9 - i$

D'où $\boxed{z' = -iz + 10 + 8i}$

✓ Vérifions que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$

$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = -ic + 10 + 8i$

$\Leftrightarrow c' = -i(11 - i) + 10 + 8i$

$\Leftrightarrow c' = -11i - 1 + 10 + 8i = 9 - 3i$

D'où $\boxed{c' = 9 - 3i}$

Problème : (9.5 pts)

Partie I

Considérons la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^x - 1$

0.5 pt

1 - a) Montrons que $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = (1 - x)'e^x + (1 - x)(e^x)'$

$= -e^x + (1 - x)e^x$

$= e^x(-1 + 1 - x)$

D'où $\boxed{g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

0.75 pt

b) Montrons que g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ puis vérifions que $g(0) = 0$

✓ On a $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ alors le signe de $g'(x)$ est celui de $-x$ car $\quad e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Pour $x \in [0, +\infty[$ on a $-x \leq 0$ alors $g'(x) \leq 0$

Donc $\boxed{g \text{ est décroissante sur } [0, +\infty[}$

Pour $x \in]-\infty; 0]$ on a $-x \geq 0$ alors $g'(x) \geq 0$

Donc $\boxed{g \text{ est croissante sur }]-\infty; 0]}$

✓ Vérifions que $g(0) = 0$

On a $\boxed{g(0) = (1 - 0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0}$

Yassine Elamri

0.5 pt **2 -** Déduisons que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a g est continue sur $\mathbb{R}$

Puisque g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et croissante sur $]-\infty; 0]$ donc $g(0)$ est le maximum de g sur $\mathbb{R}$ c'est-à-dire $g(x) \leq g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ or $g(0) = 0$

D'où $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Partie II

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2-x)e^x - x$ et (C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

0.5 pt **1 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2-x)e^x - x$$

$$= -\infty$$

car $\lim\limits_{x \to +\infty} (2-x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$.

0.75 pt **b)** Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis Déduisons que (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(2-x)e^x - x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(2-x)e^x}{x} - \frac{x}{x}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (2-x)\frac{e^x}{x} - 1$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (2-x)\frac{e^x}{x} - 1$$

$$= -\infty$$

Car $\lim\limits_{x \to +\infty} (2-x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Alors (C) admet une branche parabolique au direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

0.75 pt **2 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et calculons $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + x$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (2-x)e^x - x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2e^x - xe^x - x$$

$$= +\infty$$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = \lim_{x \to -\infty} 2e^x - xe^x - x + x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 2e^x - xe^x$$

$$= 0$$

Car $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} xe^x = 0$

Yassine Elamri

0.25 pt **b)** Montrons que la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$

D'où la droite $(D) : y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $-\infty$

0.5 pt **3 - a)** Montrons que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2-x)'e^x + (2-x)\left(e^x\right)' - x' \\ &= -e^x + (2-x)e^x - 1 \\ &= e^x(-1+2-x) - 1 \\ &= e^x(1-x) - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

D'où $f'(x) = g(x)$

0.25 pt **b)** Interprétons géométriquement le résultat $f'(0) = 0$

On a $f'(0) = g(0) = 0$ donc (C) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

0.5 pt **c)** Montrons que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de la fonction f

On a $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Donc $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

0.5 pt **4 -** Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admettra que $e^{\frac{3}{2}} > 3$)

On a la fonction f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, de plus $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ donc $0 \in f(\mathbb{R})$.

D'après le T.V.I. l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{Or } f(\tfrac{3}{2}) \times f(2) &= [(2-\tfrac{3}{2})e^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}] \times [(2-2)e^2 - 2] \\ &= (-2)(\tfrac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2}) \\ &= -e^{\frac{3}{2}} + 3 < 0 \end{aligned}$$

Donc $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

Yassine Elamri

0.5 pt **5 - a)** Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x)+x=0$ et déduisons que (C) et (D) se coupent au point $A(2;-2)$

$f(x)+x=0 \iff (2-x)e^x - x + x = 0$

$\iff (2-x)e^x = 0$

$\iff 2-x=0$

$\iff x=2$

Donc (C) et (D) se coupe au point $A(2;f(2))$, or $f(2)=-2$ donc $A(2;-2)$

0.25 pt **b)** Étudions le signe de $f(x)+x$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x)+x=(2-x)e^x$, or $e^x>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$, alors le signe de $f(x)+x$ est celui de $2-x$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)+x$		$+$	0	$-$	

0.25 pt **c)** Déduisons que (C) est au-dessus de (D) sur $]-\infty;2[$ et en-dessous de (D) sur $]2;+\infty[$.

On a $\forall x\in]-\infty;2[$: $f(x)+x>0$, alors (C) est au-dessus de (D) sur l'intervalle $]-\infty;2[$

Et on a $\forall x\in]2;+\infty[$: $f(x)+x<0$, alors (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $]2;+\infty[$

0.5 pt **6 - a)** Montrons que (C) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$

On a $f'(x)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Donc $f''(x)=g'(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

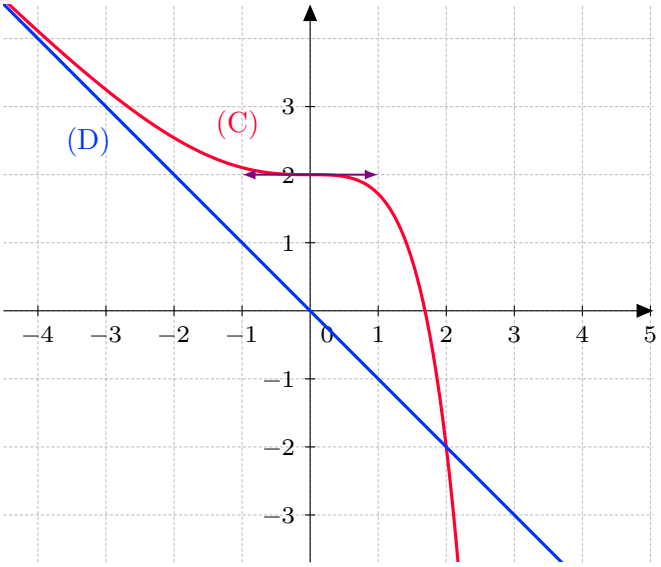
$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$f''(x)\geq 0 \quad \forall x\in]-\infty;0]$ et $f''(x)\leq 0 \quad \forall x\in[0;+\infty[$

Donc (C) possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et $f(0)=2$

D'où (C) possède un seul point d'inflexion de coordonnées $(0;2)$

1 pt **b)** Construisons la droite (D) et la courbe (C) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.



Yassine Flamri

1 pt

7 - a) Montrons, à l'aide d'une intégration par parties, que : $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = 3-\frac{4}{e}$.

Calculons $\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx$

Posons $u(x) = 2-x$ donc $u'(x) = -1$

$v'(x) = e^x$ donc $v(x) = e^x$

$$\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = [(2-x)e^x]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} -e^x dx$$

$$= 2 - 3e^{-1} + [e^x]_{-1}^{0}$$

$$= 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

D'où $\boxed{\int_{-1}^{0}(2-x)e^x dx = 3-\frac{4}{e}}$

0.25 pt

b) Déduisons, en cm^2, l'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.

On sait que la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur l'intervalle $[-1;0]$

$$A = \int_{1}^{e} f(x) - (-x)dx \times 1cm \times 1cm$$

$$= \int_{1}^{e} (f(x)+x)\,dx \quad cm^2$$

$$= \int_{1}^{e} (2-x)e^x dx \quad cm^2$$

$$= \left(3-\frac{4}{e}\right) \quad cm^2$$

D'où $\boxed{A = \left(3-\frac{4}{e}\right) \quad cm^2}$

FIN

Yassine Elamri