ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences & Technologie

## Session : Normal 2010

# MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

## Exercice 1 : (3 pts)

*Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *; on considère les points* $A\,(-1,0,3)$ *;* $B\,(3,0,0)$ *et* $C\,(7,1,-3)$ *et* $(S)$ *la sphère d'équation* $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$

1 pt

**1 -** on sait que $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}x_C-x_A\\y_C-y_A\\z_C-z_A\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}8\\1\\-6\end{pmatrix}$

Alors

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-3&-6\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}4&8\\-3&-6\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}4&8\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}=3\vec{i}+4\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$

Soit $M(x,y,z)\in(ABC)$, et on sait que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $(ABC)$.

Donc les deux vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux ; c'est à dire $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

où $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+1\\y\\z-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$

Donc $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=3(x+y)+0y+4(z-3)=3x+4y-9$

Alors $3x+4y-9=0$

D'où l'équation cartésienne du plan $(ABC)$ est $(ABC):\ 3x+4y-9=0$



T than yesterday, tomorrow better than today

**0.5 pt** **2 -** On a $(S)$ : $x^2+y^2+z^2-6x-2y-15=0$, donc

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-6x-2y-15 &= 0 \\ (x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)+z^2-15-9-1 &= 0 \\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 &= 25 \end{aligned}$$

Alors $(S)$ est la sphère de centre $\Omega(3,1,0)$ et de rayon $R=\sqrt{25}=5$

**3 -** *Soit $(\Delta)$ la droite passant par le point $\Omega$ et perpendiculaire au plan $(ABC)$.*

**0.5 pt** **a)** Soit $M(x,y,z)\in(\Delta)$, et on a $\Omega\in(\Delta)$. Donc $\overrightarrow{\Omega M}$ est un vecteur directeur à $(\Delta)$.

et on a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $(ABC)$.

Puisque $(\Delta)$ est perpendiculaire à $(ABC)$, donc $\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires ;

c'est à dire $\exists\, t\in\mathbb{R}$ : $\overrightarrow{\Omega M}=t\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

où $\overrightarrow{\Omega M}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\\z-0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, donc $\begin{cases}x-3=3t\\y-1=0t\\z-0=4t\end{cases}$ ; $\forall\, t\in\mathbb{R}$

Alors représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ est $(\Delta)$ : $\begin{cases}x=3t+3\\y=1\\z=4t\end{cases}$

**1 pt** **b)** Soit $M(x,y,z)\in(\Delta)\bigcap(S)$, donc

$$\begin{cases} x = 3t+3 \\ y = 1 \\ z = 4t \\ (x-3)^2+(y-1)^2+(z-0)^2 = 25 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} (3t+3-3)^2+(1-1)^2+(4t-0)^2 &= 25 \\ 9t^2+16t^2 &= 25 \\ 25t^2 &= 25 \\ t^2 &= 1 \\ t &= \pm 1 \end{aligned}$$

- Pour $t=1$, on a $\begin{cases}x=3\times 1+3=6\\y=1\\z=4\times 1=4\end{cases}$ donc $E(6,1,4)$
- Pour $t=-1$, on a $\begin{cases}x=3\times(-1)+3=0\\y=1\\z=4\times(-1)=-4\end{cases}$ donc $F(0,1,-4)$

D'où la droite $(\Delta)$ coupe la sphère $(S)$ aux deux points $E(6,1,4)$ et $F(0,1,-4)$.

Yassine Elamri

## Exercice 2 : (3 pts)

**1 pt**

**1 -** On a $z^2-6z+10=0$, donc le discriminant $\triangle = b^2-4ab = (-6)^2-4\times 1\times 10 = -4 < 0$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{6+i\sqrt{4}}{2} = 3+i \quad et \quad z_2 = \overline{z_1} = 3-i$$

Alors $S = \{3-i, 3+i\}$

**2 -** *Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct* $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ *; on considère les points A, B et C d'affixes respectives* $a = 3-i, b = 3+i$ *et* $c = 7-3i$.

*Soit z l'affixe du point M et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

**0.5 pt**

**a)** On a $R(M) = M'$, donc $z'-a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a)$ Alors

$$\begin{aligned} z' &= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)(z-a)+a \\ z' &= (0+i\times 1)(z-3+i)+3-i \\ z' &= iz-3i-1+3-i \end{aligned}$$

$D'o\quad z' = iz+2-4i$

**0.25 pt**

**b)** On a $R(C) = C'$, donc $c' = ic+2-4i$ Alors

$$\begin{aligned} c' &= i(7-3i)+2-4i \\ c' &= 7i+3+2-4i \end{aligned}$$

$D'o\quad c' = 5+3i$

**1.25 pt**

**c)** On a

$$\frac{c'-b}{c-b} = \frac{5+3i-3-i}{7-3i-3-i} = \frac{2+2i}{4-4i} = \frac{2(1+i)}{4(1-i)} = \frac{(1+i)^2}{2(1-i)(1+i)} = \frac{2i}{2(1+1)} = \frac{i}{2}$$

D'où $\dfrac{c'-b}{c-b} = \dfrac{1}{2}i$

Puisque $\dfrac{c'-b}{c-b} = \dfrac{1}{2}i = \dfrac{1}{2}(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2})$, donc $arg\left(\dfrac{c'-b}{c-b}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Alors $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC'}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$

D'où le triangle BCC' est rectangle en B.

Et on a

$$\begin{aligned} \left|\frac{c'-b}{c-b}\right| &= \frac{1}{2} \\ \frac{|c'-b|}{|c-b|} &= \frac{1}{2} \\ \frac{BC'}{BC} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$D'o\quad BC = 2BC'$

Yassine Elamri

## Exercice 3 : (3 pts)

*Une urne contient cinq boules blanches, trois boules rouges et deux boules noires (les boules sont indiscernables au toucher)*

*On tire au hasard et simultanément quatre boule de l'urne.*

**1 -** *On considère les deux évènements*

*A : Tirer une seule boule rouge*

*B : Tirer au moins une boule blanche*

**1 pt** On a $Card(\Omega) = C_{10}^4 = 210$, donc

$$p(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^1 \times C_7^3}{210} = \frac{3 \times 35}{210} = \frac{1}{2}$$

$$p(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^1 \times C_5^3 + C_5^2 \times C_5^2 + C_5^3 \times C_5^1 + C_5^4}{210} = \frac{5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 + 5}{210}$$
$$= \frac{205}{210}$$
$$= \frac{41}{42}$$

ou par une autre méthode ; on prend l'évènement

$\overline{B}$ : Aucune boule blanche parmi les quatre boules tirées,

donc $p(\overline{B}) = \frac{Card(\overline{B})}{Card(\Omega)} = \frac{C_5^4}{210} = \frac{5}{210} = \frac{1}{42}$, Alors $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{42} = \frac{41}{42}$

**2 -** *Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.*

**0.25 pt** **a)** On peut obtenir

- Aucune boule rouge parmi les quatre boules tirées, donc $X = 0$
- Une seule boule rouge parmi les quatre boules tirées, donc $X = 1$
- Deux boules rouges parmi les quatre boules tirées, donc $X = 2$
- Trois boules rouges parmi les quatre boules tirées, donc $X = 3$

D'où les valeurs prises par X sont 0, 1, 2 et 3.

**1 pt** **b)**

$$p(X = 0) = \frac{Card(X = 0)}{Card(\Omega)} = \frac{C_7^4}{210} = \frac{35}{210} = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 2) = \frac{Card(X = 2)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^2 \times C_7^2}{210} = \frac{3 \times 21}{210} = \frac{3}{10}$$

**0.75 pt** **c)** On a $p(X = 1) = p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(X = 3) = \frac{Card(X = 3)}{Card(\Omega)} = \frac{C_3^3 \times C_7^1}{210} = \frac{1 \times 7}{210} = \frac{1}{30}$

Donc

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $p(X = k)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{10}$ | $\frac{1}{30}$ |

Yassine Elamri

## Exercice 4 : (3 pts)

*On considère la suite numérique $(u_n)$ définie par tout $n$ de $\mathbb{N}$ par* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} \end{cases}$

**1 -** Pour $n = 0$, on a $u_0 - 1 = 2 - 1 = 1$ et $1 > 0$ donc $u_1 > 0$

**0.75 pt** Alors la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n - 1 > 0$, pour $n$ fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} - 1 > 0$

On a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n - 1}{2u_n} - 1 = \dfrac{3u_n - 1 - 2u_n}{2u_n} = \dfrac{u_n - 1}{2u_n} > 0$

car $u_n - 1 > 0$, et donc $u_n > 1$

Alors $U_{n+1} - 1 > 0$

D'où $u_n - 1 > 0; \ \forall n \in \mathbb{N}$

**2 -** *On considère la suite numérique $(v_n)$ définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$*

**1 pt** **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 1}{2u_{n+1} - 1} = \dfrac{\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1}{2\frac{3u_n - 1}{2u_n} - 1} = \dfrac{\frac{u_n - 1}{2u_n}}{\frac{6u_n - 2 - 2u_n}{2u_n}} = \dfrac{u_n - 1}{4u_n - 2} = \dfrac{u_n - 1}{2(2u_n - 1)}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}); \ v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$

D'où $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}; \ v_n = v_0 \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, où $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{2u_0 - 1} = \dfrac{1}{3}$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N}); \ v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

**0.75 pt** **b)** On a $v_n = \dfrac{u_n - 1}{2u_n - 1}$, donc

$$\begin{aligned} v_n(2u_n - 1) &= u_n - 1 \\ 2v_n u_n - v_n &= u_n - 1 \\ 2v_n u_n - u_n &= v_n - 1 \\ u_n(2v_n - 1) &= v_n - 1 \end{aligned}$$

*D'o* $u_n = \dfrac{v_n - 1}{2v_n - 1}; \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Puisque $v_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, donc $u_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{2 \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

Alors $\lim u_n = \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1} = \dfrac{0 - 1}{0 - 1} = 1$

Car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, c'est à dire $\lim \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

D'où $\lim u_n = 1$

Yassine Elamri

0.5 pt **3 -** *Soit $(w_n)$ la suite numérique définie par $w_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

On a $\lim u_n = 1$, donc $\lim w_n = \lim \ln u_n = \ln 1 = 0$ (car la fonction ln est continue en 1)

## Exercice 5 : (8 pts)

### Partie I

*On considère la fonction numérique $g$ définie sur $\mathbb{R}$ par* $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

**1 -** On sait que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit de deux fonctions dérivables, alors :

On a $(\forall x \in \mathbb{R})\,; g'(x) = (4xe^{2x})' = 4x'e^{2x} + 4x \times (2x)'e^{2x} = 4e^{2x} + 8xe^{2x} = 8xe^{2x} + 4e^{2x}$

0.5 pt

D'où $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}\,; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

0.5 pt **2 -** On a $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}\,; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $2x+1$ (car $e^{2x} > 0\,; \quad \forall x \in \mathbb{R}$)

Puisque $2x+1 = 0$ est équivalent à $x = -\frac{1}{2}$, donc le signe de $2x+1$ comme suit

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $g'(x) \geq 0\,; \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et $g'(x) \leq 0\,; \quad \forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

D'où $g$ est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, et décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$

0.5 pt **3 - a)** On a $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) e^{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 - 2e^{-1} = 1 - \frac{2}{e}$

D'où $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{e-2}{e}$

et puisque $e \simeq 2.7$, alors $e - 2 > 0$. Donc $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

0.25 pt **b)** On a $g$ est décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$, et croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$,

Donc $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ est le minimum de $g$ sur $\mathbb{R}$, alors $g(x) \geq g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0\,; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où $g(x) > 0\,; \quad \forall x \in \mathbb{R}$

### Partie II

*On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$, et $(\mathcal{C}_f)$ est la courbe représentative de $f$ dans le repère orthonormé $(O, i, j)$ (unité : 2cm)*

Yassine Elamri

**1 pt** **1 -** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{t\to-\infty} te^{t} = 0$ ; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

**2 -** On sait que la fonction $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme le produit et la somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, alors :

**0.75 pt** On a $f'(x) = \left((2x-1)e^{2x}\right)' + x' = (2x-1)'e^{2x} + (2x-1)\times(2x)'e^{2x} + 1$

$= 2e^{2x} + 4xe^{2x} - 2e^{2x} + 1$

D'où $f'(x) = g(x)$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$

or $g(x) > 0$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $f'(x) > 0$ ; $\forall x \in \mathbb{R}$

D'où $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

**0.75 pt** **3 - a)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x-1)e^{2x}+x+1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{2x}{x} - \dfrac{1}{x}\right)e^{2x} + \dfrac{x}{x} + \dfrac{1}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2 - \dfrac{1}{x}\right)e^{2x} + 1 + \dfrac{1}{x}$

et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{x} = 2$ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une parabolique parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées.

**0.5 pt** **b)** On a $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x-1)e^{2x} + x + 1 - (x+1) = \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} - e^{2x}$

et puisque $\lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} te^{t} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - (x+1)) = 0$ alors la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x+1$ est asymptote à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $-\infty$.

**0.5 pt** **c)** Soit $M(x,y)$ le point d'intersection de la droite $(\triangle)$ d'équation $y = x+1$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$. Donc $x+1 = f(x)$, c'est à dire $f(x) - (x+1) = 0$

On a $f(x) - (x+1) = 0$ est équivalent à $(2x-1)e^{2x} = 0$

or $e^{2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, donc $2x - 1 = 0$

D'où $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2}$ sont les coordonnées du point d'intersection de la droite $(\triangle)$ et la courbe $(\mathcal{C}_f)$.

Puisque $f(x) - (x+1) = 0$ est équivalent à $(2x-1)e^{2x} = 0$, donc le signe de

Yassine Elamri

$f(x)-(x+1)$ est celui de $2x-1$ (car $e^{2x}>0$ ; $\forall x\in\mathbb{R}$) ; et le signe de $2x-1$ est comme suit

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc $f(x)<x+1$ sur $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessous de la droite $(\triangle)$ sur l'intervalle $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$.

et $f(x)>x+1$ sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$, alors la courbe $(\mathcal{C}_f)$ est au-dessus de la droite $(\triangle)$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

**4 - a)** On sait que $f$ est dérivable en 0

**0.25 pt** Alors l'équation cartésienne de tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point O est

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$

et puisque $f'(0)=1$ et $f(0)=0$, donc $y=x$

D'où $(T): y=x$ est l'équation cartésienne de $(T)$ tangente à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point O.

**0.25 pt** **b)** On a $f'(x)=g(x)$ ; $\forall x\in\mathbb{R}$, donc $f''(x)=g'(x)=4(2x+1)e^{2x}$ ; $\forall x\in\mathbb{R}$

D'après la question 2), on a

$$f''(x)\geq 0\,;\,\forall x\in\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[ \quad\text{et}\quad f''(x)\leq 0\,;\,\forall x\in\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$$

Alors le tableau de variation de la fonction $f''$ est

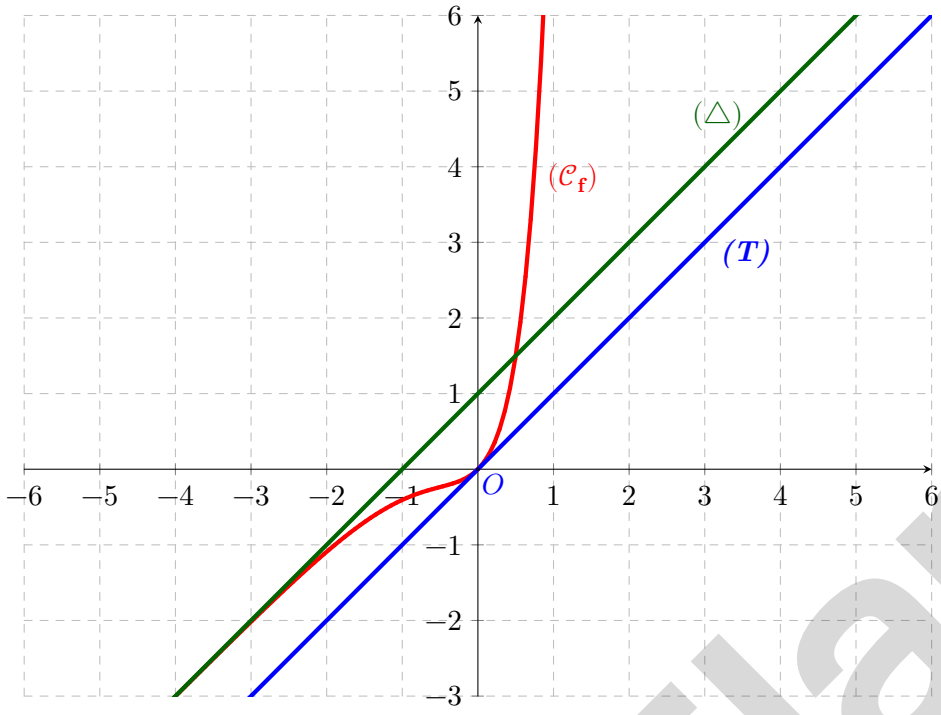
| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

D'où La courbe $(\mathcal{C}_f)$ possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

**0.75 pt** **5 -**

Yassine Elamri


T r than yesterday, tomorrow better than today




**1 pt** **6 - a)** Pour calculer $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx$ à l'aide d'une intégration par parties, on pose

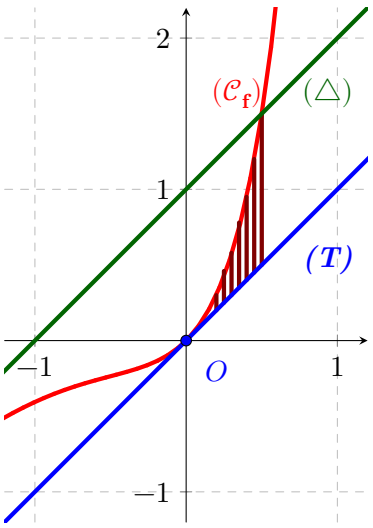
$u(x)=2x-1$ et $v'(x)=e^{2x}$, donc $u'(x)=2$et $v(x)=\frac{1}{2}e^{2x}$, alors

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=\left[(2x-1)\times\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}2\times\frac{1}{2}e^{2x}dx=\left[(x-\frac{1}{2})e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{2x}dx$$

$$=\left[0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}-\left[\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right]=1-\frac{e}{2}$$

D'où $\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx=1-\frac{e}{2}$

**0.5 pt** **b)**




On sait que Graphiquement, l'intégration sert à mesurer une aire, donc l'aire du domaine

Yassine Elamri

plan limité par $(\mathcal{C}_f)$, la tangente $(T)$ à $(\mathcal{C}_f)$ et les deux droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est une intégrale. Alors

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - x|\, dx \times \left\|\vec{i}\right\| \times \left\|\vec{j}\right\| \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (f(x) - x)dx \times (2cm)^2 \\ &\qquad \left(car\ d'aprs\ la\ figure\ f(x) \geq x; \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} \left((2x-1)e^{2x} + 1\right) dx \quad cm^2 \\ &= 4\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx + 4\int_0^{\frac{1}{2}} 1dx \quad cm^2\end{aligned}$$

D'après la question $6 - a)$, on a $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4\left(1 - \frac{e}{2}\right) + 4\,[x]_0^{\frac{1}{2}} \quad cm^2 \\ &= 4 - 2e + 4\left(\frac{1}{2} - 0\right) \quad cm^2\end{aligned}$$

$D'o\quad \mathcal{A} = (6 - 2e)\ cm^2$

Yassine Elamri