ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Éxpérimentales

Session : Rattrapage 2009

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans L'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. le point $A(2,2,-1)$, le plan (P) d'équation $2x+y+2z-13=0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,0,1)$ et de rayon 3.

0.75 pt

1 - a) On montre que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S) puis on vérifie que $A \in (S)$.

- Montrons que : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S).

  On a (S) est la sphère de centre Ω et de rayon $R=3$. Soit $M(x,y,z) \in (S)$ alors :

$$\begin{aligned} \Omega M = R &\Leftrightarrow \Omega M^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow (x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2 = 3^2 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-1)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+z^2-2z+1-9=0 \\ &\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0 \end{aligned}$$

  Donc : $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est une équation cartésienne de la sphère (S)

- Vérifions que le point $A \in (S)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \Omega A &= \sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2+(z_A-z_\Omega)^2} \\ &= \sqrt{(2-1)^2+2^2+(-1-1)^2} \\ &= \sqrt{1+4+4} \\ &= \sqrt{9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc $\Omega A = R$ D'où $A \in (S)$

0.75 pt

b) On calcule la distance du point Ω au plan (P) puis en déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S).

- Calculons $d(\Omega,(P))$.
  On a $(P): 2x+y+2z-13=0$ et $\Omega(1,0,1)$ donc :

$$\begin{aligned} d(\Omega,(P)) &= \frac{|2x_\Omega + y_\Omega + 2z_\Omega - 13|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} \\ &= \frac{|2+0+2-13|}{3} \\ &= \frac{|-9|}{3} \\ &= 3 \end{aligned}$$

  Donc : $d(\Omega,(P)) = 3$

- Déduisons que le plan (P) est tangent à la sphère (S).
  On a : $d(\Omega,(P)) = 3 = R$
  Donc le plan (P) est tangent à la sphère (S)

2 - Soit (D) la droite passant par le point A et perpendiculaire au plan (P).

0.75 pt

a) On montre que : $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et que : $(6,-6,-3)$ est le triple de cordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$

- On a la droite (D) est perpendiculaire au plan (P), alors le vecteur $\vec{u}(2,1,2)$, normal à (P), est un vecteur directeur de la droite (D).
- Déterminons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}$.
  On a : $\overrightarrow{\Omega A}(x_A - x_\Omega; y_A - y_\Omega; z_A - z_\Omega)$ donc $\overrightarrow{\Omega A}(2-1;2-0;-1-1)$ d'où $\overrightarrow{\Omega A}(1,2,-2)$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{u} &= \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2\times 2 + 2\times 1)\vec{i} - (1\times 2 + 2\times 2)\vec{j} + (1\times 1 - 2\times 2)\vec{k} \\ &= 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} \end{aligned}$$

D'où : $\overrightarrow{\Omega A} \wedge \overrightarrow{u} = 6\vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k}$

0.75 pt

b) On calcule $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\| \vec{u} \|}$ puis en déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A.

- On a : $\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2+1^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$, donc $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\| \vec{u} \|} = \frac{9}{3} = 3$.
- On a : $d(\Omega,(D)) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u}\right\|}{\| \vec{u} \|} = 3 = R$, alors la droite (D) est tangente à la sphère (S) en A.

Yassine Elamri

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt **1 -** Résolvons dans l'ensemble des nombres complexes C, l'équation : $z^2 - 6z + 25 = 0$

On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 25 = 36 - 100 = -64$

Comme $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions conjuguées sont :
$z_1 = \dfrac{-(-6) - i\sqrt{-\Delta}}{2} = \dfrac{6 - i\sqrt{64}}{2} = 3 - 4i$ et $z_2 = \bar{z_1} = 3 + 4i$

Donc : $S = \{3 - 4i; 3 + 4i\}$

0.5 pt **2 - a)** On calcule $\dfrac{d-c}{a-c}$ puis en déduire que les points A, C et D sont alignés.

- On a :

$$\begin{aligned}\frac{d-c}{a-c} &= \frac{5+6i-2-3i}{3+4i-2-3i}\\ &= \frac{3+3i}{1+i}\\ &= \frac{3(1+i)}{1+i}\\ &= 3.\end{aligned}$$

- Puisque $\dfrac{d-c}{a-c} = 3 \in \mathbb{R}$,
alors les points A , C et D sont alignés .

0.5 pt **b)** On montre que le nombre $p = 3 + 8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie $h(B, \frac{3}{2})$.

$$\begin{aligned}\text{On a : } h(A) = P &\Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}\\ &\Leftrightarrow p - b = \frac{3}{2}(a-b)\\ &\Leftrightarrow p = b + \frac{3}{2}(a-b)\\ &\Leftrightarrow p = 3 - 4i + \frac{3}{2}8i\\ &\Leftrightarrow p = 3 - 4i + 12i\\ &\Leftrightarrow p = 3 + 8i\end{aligned}$$

Donc : $p = 3 + 8i$

1 pt **c)** On écrit sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$ puis en déduire que $\frac{\pi}{4}$ est une mesure de l'ongle $\left(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PD}}\right)$ et que $PA = \sqrt{2}PD$.

Yassine Elamri

- On a :

$$\begin{aligned}\frac{d-p}{a-p} &= \frac{5+6i-3-8i}{3+4i-3-8i}\\ &= \frac{2-2i}{-4i}\\ &= \frac{2(1-i)i}{4}\\ &= \frac{1+i}{2}\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}).\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{4})).\\ &= [\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}]\end{aligned}$$

Donc : $\frac{d-p}{a-p} = [\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\pi}{4}]$.

- On a : $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right) \equiv \arg\left(\frac{d-p}{a-p}\right)[2\pi]$.

  Alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

- Montrons que : $PA = \sqrt{2}PD$

  On a : $PA = |a-p|$ et $PD = |d-p|$

  c'est à dire : $PA = |-4i|$ et $PD = |2-2i|$

  Donc : $PA = \sqrt{(-4)^2}$ et $PD = \sqrt{2^2+(-2)^2}$

  Alors : $PA = 4$ et $PD = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ ce qui entraine que $\sqrt{2}.PD = 4$

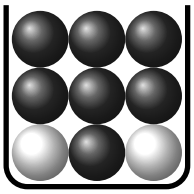
  D'ou : $PA = \sqrt{2}.PD$

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 7 boules noires et deux boules blanches(les boules sont indiscernables au toucher)

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches restantes dans l'urne après le tirage des deux boules.



0.5 pt **1 -** Déterminons les valeurs prises par la variable aléatoire X.

On tire au hasard, successivement et sans remise deux boules de l'urne, alors on tire une

Yassine Elamri

boule blanche, deux boules blanches ou on ne tire aucune boule blanche.

Donc $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$, ou Ω est l'univer de cette expérience aliatoire.

1.5 pt **2 -** Montreons que : $P(X = 0) = \frac{1}{36}$ et $P(X = 1) = \frac{7}{18}$.

• Calculons $P(X = 0)$.

l'evenement $(X = 0)$ c'est tirer deux boules blanches, donc $card(X = 0) = A_2^2 = 2$ et puisque $card(\Omega) = A_9^2 = 72$ et les boules indiscernables au toucher(Hypothèse d'équiprobabilité)

Alors : $P(X = 0) = \frac{card(X=0)}{card(\Omega)} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$.

Donc : $P(X = 0) = \frac{1}{36}$

• l'evenement $(X = 1)$ c'est tirer une boule blanche et une boule noire.

Donc $card(X = 1) = 2A_2^1.A_7^2 = 2 \times 2 \times 7 = 28$

Alors : $P(X = 1) = \frac{card(X=1)}{card(\Omega)} = \frac{28}{72} = \frac{7}{18}$.

Donc : $P(X = 1) = \frac{7}{18}$

1 pt **3 -** La loi de probabilité de la variable aléatoire X et l'espérance mathématique $E(X)$.

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X.

  D'abord l'evenement $(X = 2)$ c'est tirer deux boules noires.

  Donc $card(X = 2) = A_7^2 = 42$, d'ou $P(X = 2) = \frac{card(X=2)}{card(\Omega)} = \frac{42}{72} = \frac{7}{12}$.

$X = x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{12}$

$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$

- l'espérance mathématique $E(X)$.

$$\text{On a : } E(X) = 0 \times P(X = 0) + 1 \times P(X = 1) + 2 \times P(X = 2)$$
$$E(X) = 0 \times \frac{1}{36} + 1 \times \frac{7}{18} + 2 \times \frac{7}{12}$$
$$E(X) = \frac{14}{9}$$

Donc l'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{14}{9}$

Yassine Elamri

Exercice 4 : (3 pts)

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n} \end{cases}$$

1 pt

1 - On vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$, puis on montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-u_n > 0$.

- On vérifie que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$.

  Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} On\ a : 1-u_{n+1} &= 1 - \frac{1+4u_n}{7-2u_n} \\ &= \frac{7-2u_n-1-4u_n}{7-2u_n} \\ &= \frac{6-6u_n}{5+2-2u_n} \\ &= \frac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)} \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, 1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$.

- On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-u_n > 0$.
  - Pour $n=0$, $1-u_0 = 1 > 0$ est vraie.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $1-u_n > 0$ et on montre que : $1-u_{n+1} > 0$.

  On a : $1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$ et $1-u_n > 0$,

  Alors : $6(1-u_n) > 0$ et $5+2(1-u_n) > 0$,

  Donc : $1-u_{n+1} > 0$

  D'aprés le principe de raisonnement par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1-u_n > 0$.

2 - Soit (v_n) la suite définie par :$\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2u_n-1}{u_n-1}$

1 pt

a) On montre que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ puis on exprime v_n en fonction de n.

- On montrer que : (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$.

Yassine Elamri

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
On\ a : v_{n+1} &= \frac{2u_{n+1}-1}{u_{n+1}-1} \\
&= \frac{\frac{2(1+u_n)}{7-2u_n}-1}{\frac{1+4u_n}{7-2u_n}-1} \\
&= \frac{\frac{2+8u_n-7+2u_n}{7-2u_n}}{\frac{1+4u_n-7+2u_n}{7-2u_n}} \\
&= \frac{-5+10u_n}{-6+6u_n)} \\
&= \frac{5(2u_n-1)}{6(u_n-1)} \\
&= \frac{5}{6}v_n
\end{aligned}
$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

- On exprime v_n en fonction de n.

  Comme (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$.

  Donc : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = v_0 \times q^n$, ou $q = \frac{5}{6}$ est la raison de la suite (v_n).

  Puisque $v_0 = \frac{2u_0-1}{u_n-1} = 1$

  Alors : $\forall n \in \mathbb{N}; v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

1 pt **b)** Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

puis en déduire la limite de la suite (u_n).

- Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}.$$

Yassine Elamri

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n = \dfrac{2u_n - 2}{u_n - 1} + \dfrac{1}{u_n - 1}$

$$\Leftrightarrow v_n - 2 = \frac{1}{u_n - 1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{v_n - 2} = u_n - 1$$
$$\Leftrightarrow u_n = 1 + \frac{1}{v_n - 2} = u_n$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n - 2}{v_n - 2}$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2}$$
$$\Leftrightarrow u_n = \frac{(\frac{5}{6})^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}; u_n = \dfrac{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\frac{5}{6}\right)^n - 2}$.

- Ona : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$, car $-1 < \frac{5}{6} < 1$,

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 5 : (2 pts)

1 pt

1 - Déterminons les fonctions primitives de la fonction : $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}\, dx = \frac{1}{2010}$$

- La fonction $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ admet des fonctions primitives définies sur $\mathbb{R}$

  Et on a : $2x\left(x^2 - 1\right)^{2009} = \left(x^2 - 1\right)'\left(x^2 - 1\right)^{2009} = \left(\frac{1}{2010}\left(x^2 - 1\right)^{2010}\right)'$

  Donc $x \longmapsto \frac{1}{2010}\left(x^2 - 1\right)^{2010} + k$,

  sont les fonctions primitives de la fonction : $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$.

- On a : $x \longmapsto \frac{1}{2010}\left(x^2 - 1\right)^{2010}$ est la primitive de $x \longmapsto 2x\left(x^2 - 1\right)^{2009}$ sur $\mathbb{R}$,

Yassine Elamri

Alors :

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\ dx = \left[\frac{1}{2010}(x^2-1)^{2010}\right]_1^{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{1}{2010} - 0$$
$$= \frac{1}{2010}$$

Donc : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x\left(x^2-1\right)^{2009}\ dx = \frac{1}{2010}$.

1 pt **2 -** En utilisant l'intégration par parties, montrons que :

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = 6\ln 3 - 2$$

On pose : $u(x) = \ln(x+1)$ et $v'(x) = 2x+1$, alors : $u'(x) = \frac{1}{x+1}$ et $v(x) = x^2 + x$.

Donc :

$$\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = \left[(x^2+x)\ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x(x+1)}{x+1}\ dx$$
$$= 6\ln(3) - \int_0^2 x\ dx$$
$$= 6\ln(3) - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$
$$= 6\ln(3) - \frac{4}{2}$$
$$= 6\ln(3) - 2$$

Alors : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\ dx = 6\ln(3) - 2$.

Exercice 6 : (6 pts)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$$

et soit (C) la courbe représentative de la f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

0.5 pt **1 - a)** On vérifie que : $f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

Yassine Elamri

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \\ &= x\left(\frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})}\right) \\ &= x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right) \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x\left(\frac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right)$.

1 pt **b)** Montrons que la fonction f est paire et que :

$$f(x) - x = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

- Montrons que la fonction f est paire.

  On a $D_f = \mathbb{R}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}; -x \in \mathbb{R}$ et d'aprés la question précedente

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x\left(\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) \\ &= x\left(\frac{e^{-2x}-1}{e^{2x}+1}\right) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

  Alors f est une fonction paire.

- Montrons que :

$$f(x) - x = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}.$$

  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right) - x \\ &= x\left(\frac{e^{2x}(1-e^{-2x})}{e^{2x}(1+e^{-2x})} - 1\right) \\ &= x\left(\frac{1-e^{-2x}-e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\right) \\ &= \frac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) - x = \frac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1}$.

c) Montrons que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la

Yassine Elamri

droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right) = +\infty$

  Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x} = 0$
- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1} = 0$,

  Car : $\lim\limits_{x\to+\infty} -2xe^{-2x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-2x}+1 = 1$.
- On a : $\forall x \in \mathbb{R}; f(x)-x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1} = 0$, c'est à dire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = 0$,

  Alors : la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

0.5 pt **2 -** Montrons que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^+; f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{e^{-2x}+1}$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}^+; f(x) - x \leq 0$

Car : $-2xe^{-2x} \leq 0$ et $e^{-2x}+1 >$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

Donc : la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

1 pt **3 - a)** Montrons que : $f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$,

$x \longmapsto x$, $x \longmapsto e^{2x}-1$ et $x \longmapsto e^{2x}+1$

aussi $x \longmapsto e^{2x}+1$ ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[x\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\right]' \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x\frac{(e^{2x}-1)'(e^{2x}+1)-(e^{2x}+1)'(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} + x\frac{2e^{2x}(e^{2x}+1)-2e^{2x}(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{(e^{2x}-1)(e^{2x}+1)}{(e^{2x}+1)^2} + \frac{2xe^{4x}+2xe^{2x}-2xe^{4x}+2xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \\ &= \frac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} \end{aligned}$$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$

- $f'(0) = \dfrac{e^0-1+4\times 0e^{2\times 0}}{(e^0+1)^2} = \dfrac{1-1}{2^2} = 0$

Alors : $f'(0) = 0$

0.5 pt **b)** Montr0ns que : $e^{4x}-1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$ puis en déduire que

Yassine Elamri

$e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

- Montr0ns que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0, +\infty[$.

  Soit $x \in [0; +\infty[$, alors $4x \geq 0$, donc $e^{4x} \geq 1$;

  D'ou $e^{4x} - 1 \geq 0$.

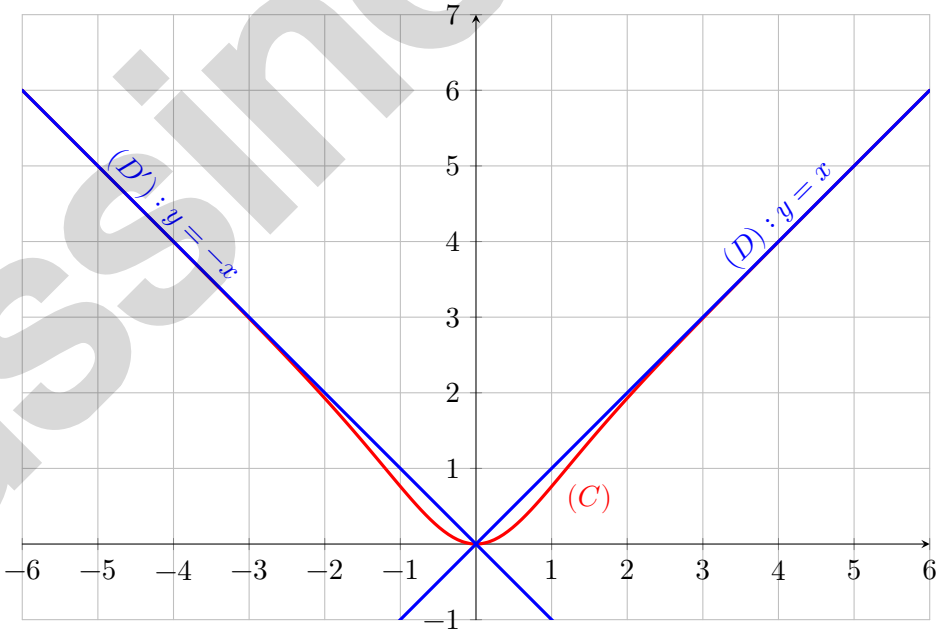
- Puisque:pour tout $x \in [0; +\infty[; e^{4x} - 1 \geq 0$, et $4xe^{4x} \geq 0$;

  Donc : $\forall x \in [0; +\infty[; [0, +\infty[; e^{4x} - 1 + 4xe^{4x} \geq 0$.

0.5 pt **c)** Le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

x	0	∞
$f(x)$	$+$	
$f'(x)$	0	$+\infty$

1 pt **4 -** Construisons, dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la courbe (C). (on admet que (C) possède deux points d'inflexions). La fonction f est paire alors (C) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et admet deux asymptotes obliques : $(D) : y = x$ au voisinage de $+\infty$ et $(D') : y = -x$ au voisinage de $-\infty$



Yassine Elamri