ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences & Technologies

Session : Normal 2008

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On considère, dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les deux points $A(0,-1,1)$, $B(1,-1,0)$ et la sphère (S) d'équation : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0$

1.25 pt **1 -** On a : $x^2+y^2+z^2-2x-4z+2=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2+(z-2)^2=\sqrt{3}^2$

Donc, (S) est la sphère $\boxed{\text{de centre } \Omega(1;0;2) \text{ et de rayon } R=\sqrt{3}}$

Et on a : $0^2+(-1)^2+1^2-2\times 0-4\times 1+2=0$, donc $\boxed{A\in(S)}$

1.25 pt **2 -** On a : $\overrightarrow{OA}\,(0;-1;1)$ et $\overrightarrow{OB}\,(1;-1;0)$

D'où : $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}\vec{k}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

par conséquence : $\boxed{\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1;1;1)}$

0.5 pt **3 -** On a $\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{OB}\,(1;1;1)$ est un vecteur normal sur le plan (OAB)

donc l'équation cartésienne du plan (OAB) s'écrit sous la forme : $x+y+z+d=0$ ave $d\in\mathbb{R}$

Or : $O\in(OAB)$, donc $d=0$

et donc $\boxed{x+y+z=0}$ est une équation cartésienne du plan (OAB)

Calculons la distance du point Ω au plan (OAB)

$d(\Omega;(OAB))=\dfrac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}$

$\boxed{d(\Omega;(OAB))=\sqrt{3}=R}$

Donc $\boxed{\text{le plan } (OAB) \text{ est tangent à la sphère } (S) \text{ au point } A}$ puisque $A\in(S)$ et $A\in(OAB)$

Today bettehttps://steinmath.com tomorrow better than today

Exercice 2 : (3 pts)

1 pt

1 - On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 34 = 0$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 34 = 36 - 136 = -100 = 10i^2$

Alors, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) + 10i}{2} = 3 + 5i$, et $z_2 = \dfrac{-b1i\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-(-6) - 10i}{2} = 3 - 5i$

(***On peut aussi calculer le discriminant réduit de cette équation :***

$\Delta' = (-3)^2 - 1 \times 34 = 36 - 34 = -25 = 5i^2$

D'où les solutions :

$z_1 = \dfrac{-b' + i\sqrt{\Delta}'}{a} = \dfrac{-(-3) + 5i}{1} = 3 + 5i$, ***et*** $z_2 = \dfrac{-b'1i\sqrt{\Delta}'}{a} = \dfrac{-(-3) - 5i}{1} = 3 - 5i$)

Alors l'ensemble des solutions de cette équation est : $\boxed{S = \{3 - 5i \ ; \ 3 + 5i\}}$

$\overrightarrow{e_2}$), on considère

de l'urne

V ou

ou VVV est :

$$\frac{C_6^2 \times C_3^1 + C_6^1 \times C_3^2 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{15 \times 3 + 6 \times 3 + 1}{84} = \boxed{\frac{16}{21}}$$

http
https://steinmath.c
Today better than yesterday, tomorrow better than t

Deuxième méthode : : On considère l'événement A : "tirer **au moins** *une* boule verte"

L'événement contraire de l'événement A est : $\overline{A}$: "tirer *trois* boules rouges RRR"

On a $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_6^3}{C_9^3} = 1 - \dfrac{20}{84} = \dfrac{64}{84} = \boxed{\dfrac{16}{21}}$

1 pt **2 -** On tire, au hasard, successivement, et sans remise (*l'ordre n'a pas d'importance et il n'y a pas de répétition*) trois boules de l'urne

On va donc utiliser les arrangement sans répétition A_n^p

La probabilité de tirer **trois** boules rouges est : $\dfrac{A_6^3}{A_9^3} = \dfrac{120}{504} = \boxed{\dfrac{5}{21}}$

Exercice 4 : (11 pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - 2\ln x$

0.5 pt **1 - a)** Soit $x \in]0;+\infty[$

On a $g'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - \dfrac{2}{x} = \boxed{\dfrac{x-2}{x}}$

0.5 pt **b)** On sait que $g'(x) = \dfrac{x-2}{x} \quad \forall x \in]0;+\infty[$

Donc le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ est celui du monôme $x - 2$

Et on a : si $x \in [2;+\infty[\Rightarrow x \geqslant 2 \Rightarrow x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow g'(x) \geqslant 0$

Et si $x \in]0;2] \Rightarrow x \leqslant 2 \Rightarrow x - 2 \leqslant 0 \Rightarrow g'(x) \leqslant 0$

Donc g est $\boxed{\text{décroissante sur }]0;2] \text{ et croissante sur } [2;+\infty[}$

comme indiqué dans le tableau suivant :

x	0		2		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	$g(2) = 2(1-\ln 2)$	↗	

0.5 pt **2 -** On a $e > 2 \Rightarrow 1 > \ln 2 \Rightarrow 1 - \ln 2 > 0$, donc $g(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$

Et on a $g(2) = 2(1 - \ln 2)$ est une valeur minimale pour la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$ au point d'abscisse 2

Alors : $\forall x \in]0;+\infty[$ é ; $\boxed{g(x) \geqslant g(2) > 0}$

Yassine Elamri

Partie II

On Considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x-(\ln x)^2$

Et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

0.75 pt **1 -** On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-(\ln x)^2)=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=$ $\boxed{-\infty}$

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$

0.5 pt **2 - a)** On pose $t=\sqrt{x}$, donc $x\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$, et tant que $\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\ln t}{t}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\ln(t^2)}{t}\right)^2=\lim_{t\to+\infty}\left(2\times\frac{\ln t}{t}\right)^2=\boxed{0}$$

0.75 pt **b)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)\right)=\boxed{+\infty}$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)^2}{x}=0$

Et on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{(\ln x)^2}{x}\right)=\boxed{1}$

0.5 pt **c)** On a $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-(\ln x)^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-(\ln x)^2=\boxed{-\infty}$

Et selon la question précédente, la courbe (C) admet $\boxed{\text{une branche parabolique au voisinage de } +\infty}$ de direction la droite (Δ) d'équation $y=x$

0.5 pt **d)** On a $\forall x\in]0;+\infty[\ ;\ f(x)-x=-(\ln x)^2\leqslant 0$

Donc la courbe $\boxed{(C)\text{ est au-dessous de la droite }(\Delta)}$

0.75 pt **3 - a)** Soit $x\in]0;+\infty[$

On a : $f'(x)=(x-(\ln x)^2)'=1-2\ln'(x)\ln x=1-\dfrac{2\ln x}{x}=\dfrac{x-2\ln x}{x}=\boxed{\dfrac{g(x)}{x}}$

Et selon le signe de $g(x)$ **Partie I**, on a $f'(x)>0\,;\,\forall x\in]0;+\infty[$, donc $\boxed{f\text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$

0.25 pt **b)** Le tableau de variations de la fonction f

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

0.5 pt **c)** Une équation cartésienne de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est :

$y=f'(1)(x-1)+f(1)\Leftrightarrow\boxed{y=x}$

0.5 pt **4 -** On a f est continue, et strictement croissante sur $]0;+\infty[$

et $J=f(]0;+\infty[)=\left]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}f(x);\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty;+\infty[=\mathbb{R}$

Or $0\in J$, donc l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $I=]0;+\infty[$

Et puisque : $f\left(\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{e}-1=\dfrac{1-e}{e}<0$

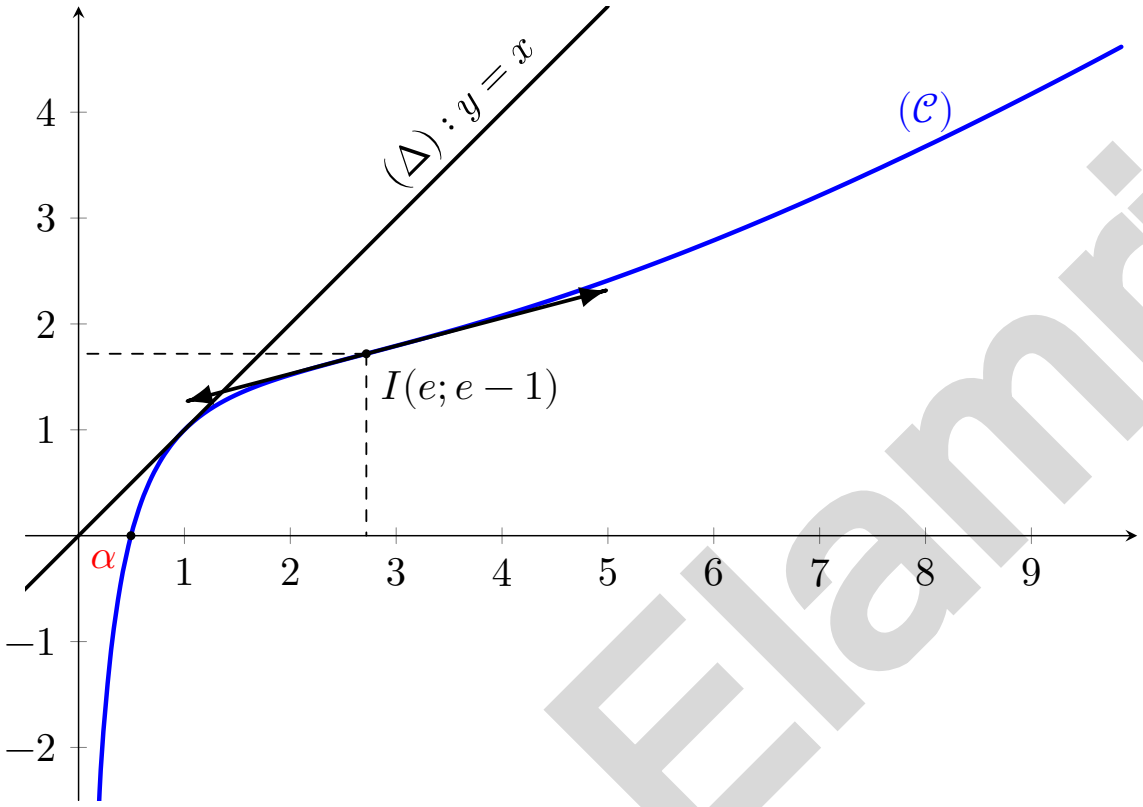
Et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}-(\ln 2)^2>0$ (car selon les données : $(\ln 2)^2<\dfrac{1}{2}$)

Alors, selon le théorème des valeurs intermédiaires, on a $\boxed{\dfrac{1}{e}<\alpha<\dfrac{1}{2}}$

Yassine Elamri

1 pt **5 -** Traçons la droite (Δ) et la courbe (C) dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Prenons : $\alpha \approx 0.4948664145$, e ≈ 2.7 et $I(e; e-1)$ point d'inflexion pour (C)



0.5 pt **6 - a)** On a $\forall x \in]0; +\infty[\,;\ H'(x) = (x\ln x - x)' = x'\ln x - x\ln' x - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

Donc : $H : x \mapsto x\ln x - x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Et on a $\displaystyle\int_1^e \ln x\mathrm{d}x = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1) = 0 - (-1) = \boxed{1}$

0.75 pt **b)** En utilisant une intégration par parties

$$\begin{aligned}
\int_1^e (\ln x)^2\mathrm{d}x &= \int_1^e \ln x \times \ln x\mathrm{d}x \\
&= \int_1^e H'(x) \times \ln x\mathrm{d}x \\
&= [H(x)\ln x]_1^e - \int_1^e H(x)\ln' x\mathrm{d}x \\
&= H(e)\ln e - H(1)\ln 1 - \int_1^e \frac{x\ln x - x}{x}\mathrm{d}x \quad (H(e) = 0 \text{ et } \ln 1 = 0) \\
&= -\int_1^e (\ln x - 1)\mathrm{d}x \\
&= -\int_1^e \ln x\mathrm{d}x + (e-1) \\
&= -1 + e - 1 \quad \left(\int_1^e \ln x\mathrm{d}x = 1\right) \\
&= \boxed{e-2}
\end{aligned}$$

0.5 pt **c)** L'aire du domaine plan délimité par la courbe (C), la droite (Δ) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est :

$\mathcal{A} = \displaystyle\int_1^e |f(x) - x|\mathrm{d}x = \int_1^e (x - f(x))\mathrm{d}x = \int_1^e (\ln x)^2\mathrm{d}x = \boxed{e - 2 \approx 0.7(u.a.)}$

Yassine Elamri

Partie III

On considère la suite numérique (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$

0.75 pt **1 -** Montrons, par récurrence, que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

➥ Pour $n = 0$ on a $u_0 = 2$, donc $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$

➥ Soit $n \in \mathbb{N}$

❖ On suppose que : $1 \leqslant u_n \leqslant 2$

❖ Montrons que : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

On sait que f est croissate sur l'intervalle $]0; +\infty[$

Donc $1 \leqslant u_n \leqslant 2 \Rightarrow f(1) \leqslant f(u_n) \leqslant f(2) \Rightarrow 1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$

Car $f(2) - 2 = -(\ln 2)^2 \leqslant 0 \Rightarrow f(2) \leqslant 2$

Alors : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ 1 \leqslant u_n \leqslant 2}$

0.5 pt **2 -** Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -(\ln(u_n))^2 \leqslant 0$

Donc la suite $\boxed{(u_n) \text{ est décroissante}}$

0.75 pt **3 -** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée par 1, donc (u_n) est convergente Et on a :

➪ f est une fonction continue sur l'intervalle $[1; 2]$

➪ f est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$

➪ On a $f([1; 2]) = [f(1); f(2)] \subset [1; 2]$; car $f(2) \leqslant 2$

➪ $u_0 = 2 \in [1; 2]$

➪ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite l

D'où : $l \in [1; 2]$; et $f(l) = l$

Et on a : $f(l) = l \Leftrightarrow l - (\ln l)^2 = l \Leftrightarrow \ln l = 0 \Leftrightarrow l = 1$

Par suite : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1}$

FIN

Yassine Elamri