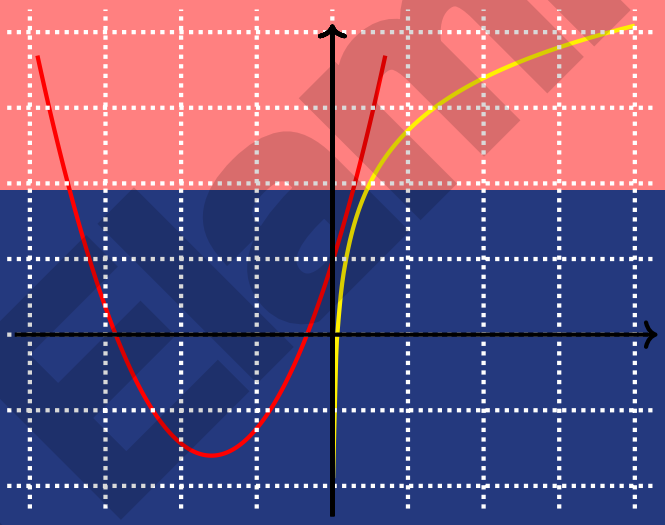
Stein Maths

Mathématiques



$$\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) \equiv arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)[2\pi]$$

2BACPC+SVT

- Résumé de Cours
- Devoirs Surveillés
- Examens Nationaux

$$\int_1^e x\ln(x)dx$$

Yassine Ennafi

https://steinmath.com

Pr. assine

Année 23-24

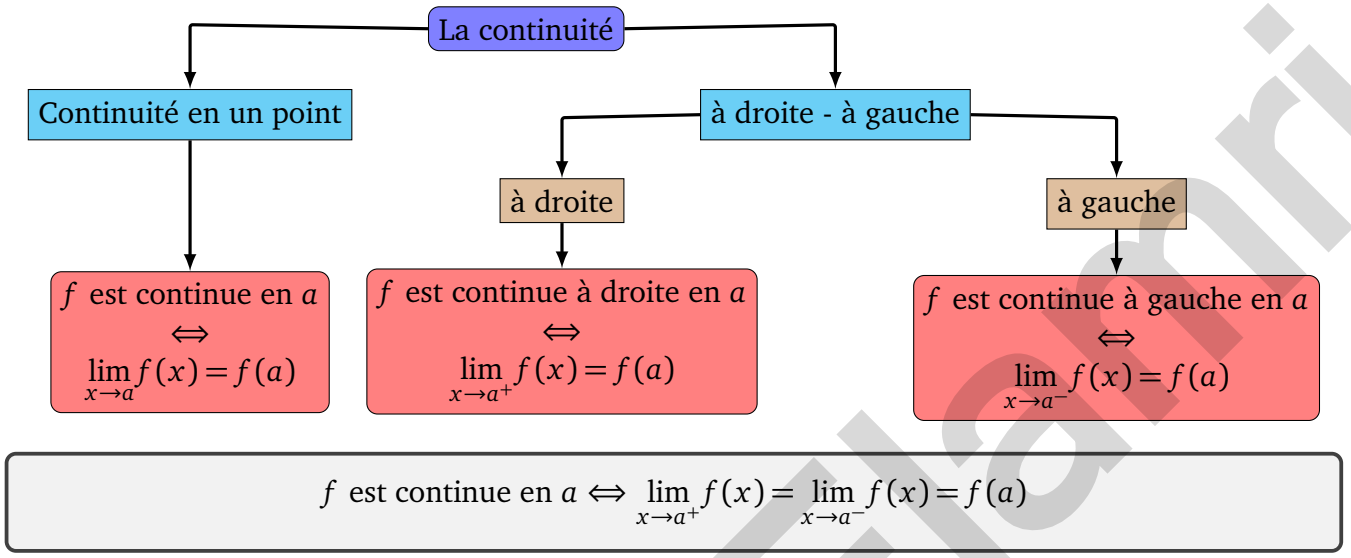
Today better than yesterday, t tter than today

Chapitre

Limites et Continuité

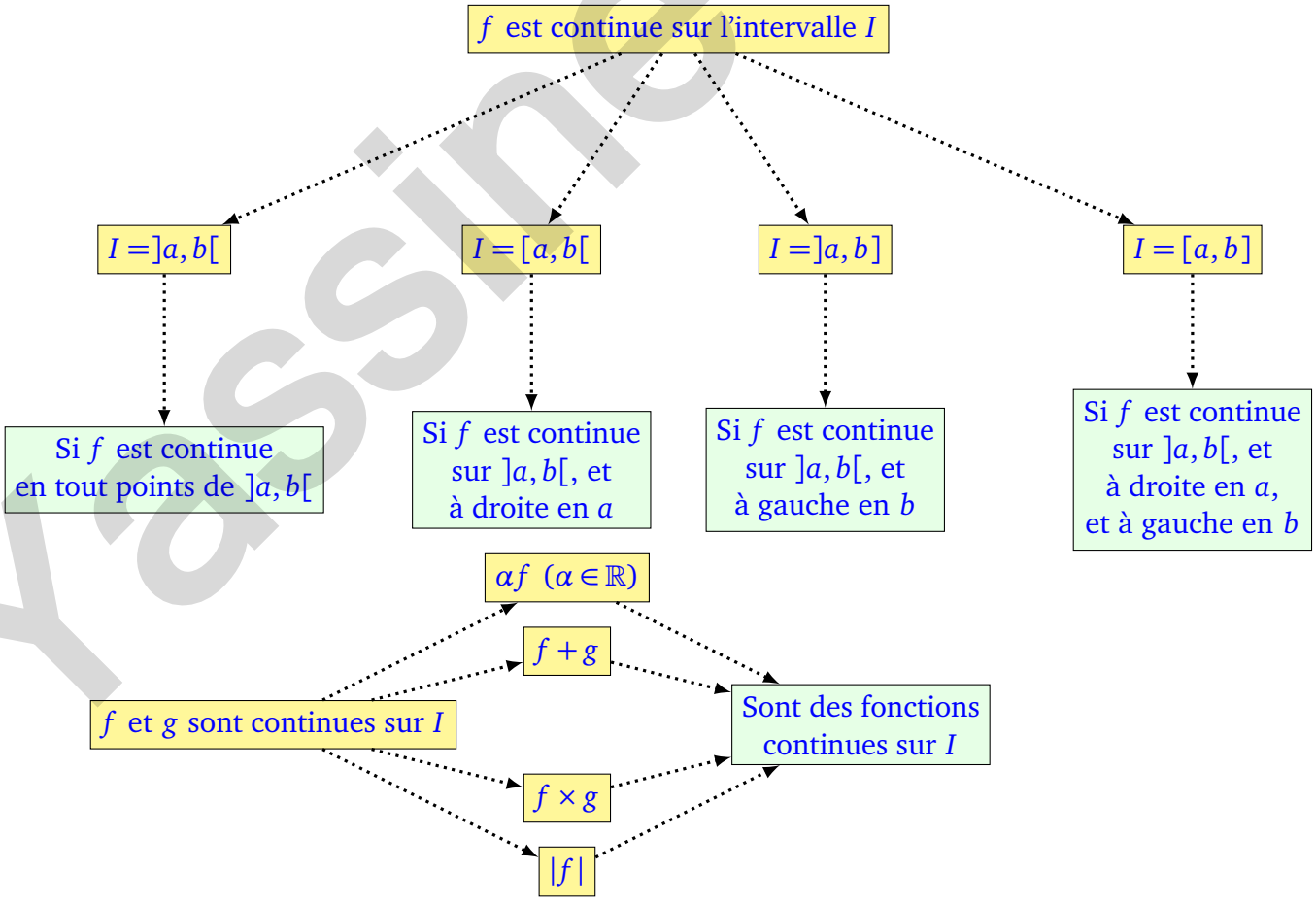
Résumé 2BSX

La continuité d'une fonction numérique



f est continue en $a \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

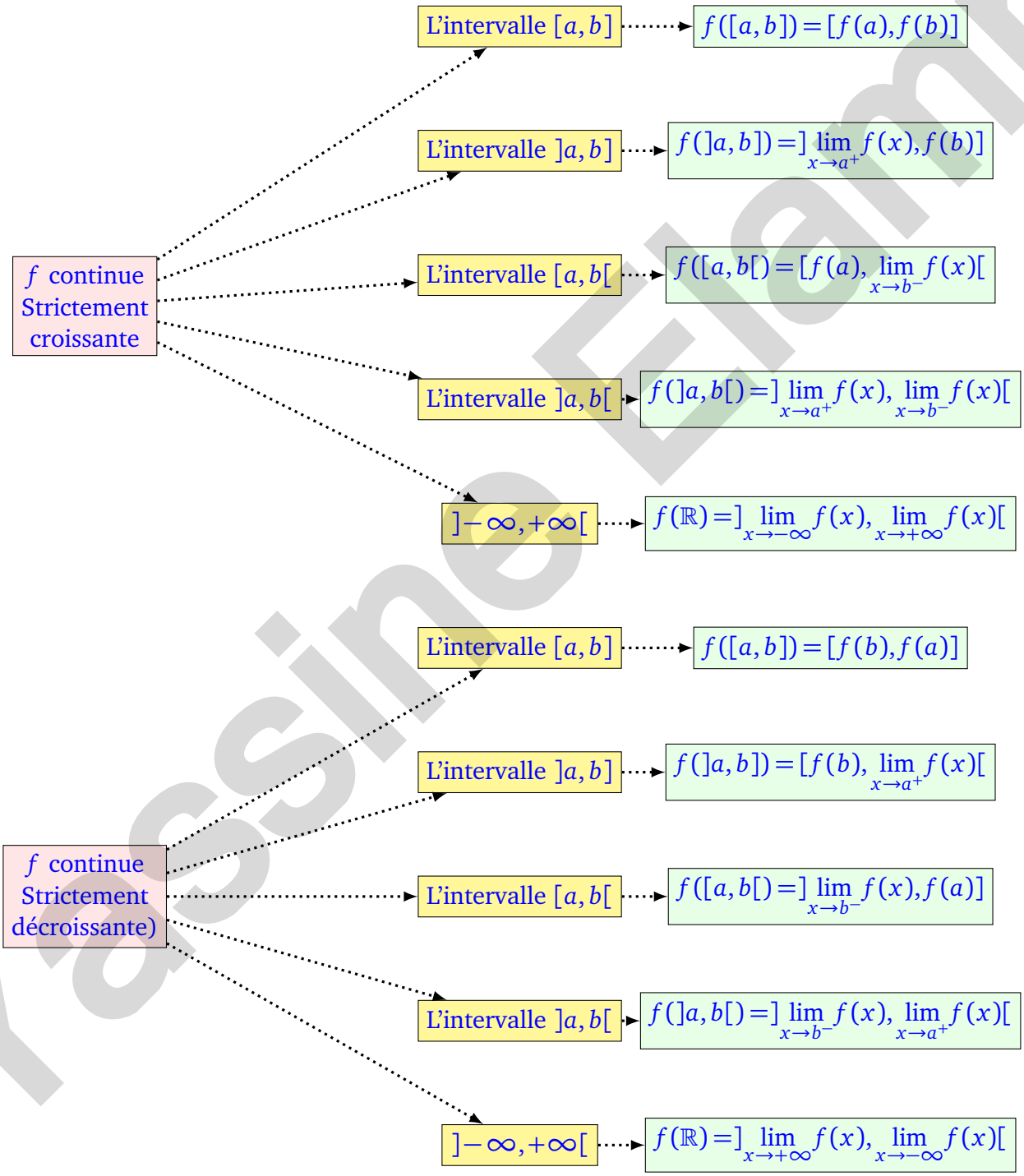
Les opérations sur les fonctions continuité



Yassine Elamri

L'image d'un intervalle par une fonction continue

- L'image d'un segment $[a,b]$ par une fonction continue est le segment $[m,M]$ où : $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$
- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle
- l'intervalle I et son image $f(I)$ par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme



Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Théorème des valeurs intermédiaires

Cas général T.V.I

pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ $\exists c \in [a,b] \ / \ f(c)=\lambda$

l'équation $f(x)=\lambda$ admet au moins une solution dans $[a,b]$

f est continue sur $[a,b]$

Cas particulier T.V.I

pour tout λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ $\exists! c \in [a,b] \ / \ f(c)=\lambda$

l'équation $f(x)=\lambda$ admet une solution unique dans $[a,b]$

f est continue strictementmonotone sur $[a,b]$

Cas particulier $\lambda=0$

Alors 0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$ $\exists! c \in [a,b] \ / \ f(c)=0$

l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique dans $[a,b]$

f est continue strictementmonotone sur $[a,b]$ et$f(a).f(b)<0$

Principe de la méthode de dichotomie -cas f strictement croissante-

$f(x)=0$ admet une solution unique α dans $]a,b[$

Calculer $c=\frac{a+b}{2}$ le centre de $]a,b[$

$f(c)<0$: $\alpha \in]c,b[$

$f(c)>0$: $\alpha \in]a,c[$

puis en continue comme précédemment

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Continuité de la composition de deux fonctions

f est continue en $a \in I$
g est dérivable en $f(a)$
Alors $g \circ f$ est continue en a

f est continue sur I
g est dérivable sur $f(I)$
Alors $g \circ f$ est continue sur I

f est définie sur I et g définie sur J $J \subset f(I)$

Dérivabilité de $g \circ f$

Fonctions réciproques $\circledast$ f^{-1} $\circledast$

f continue & Strictement monotone sur I

f admet une fonction réciproque f^{-1}

$(C_{f^{-1}})$ et (C_f) sont symétriques p/p à $(\Delta) : y = x$

Définie sur $J = f(I)$

f^{-1} à la même monotonie sur J que celle de f sur I

$$\begin{cases} (\forall x \in J)(f \circ f^{-1})(x) = x \\ (\forall x \in I)(f^{-1} \circ f)(x) = x \end{cases}$$

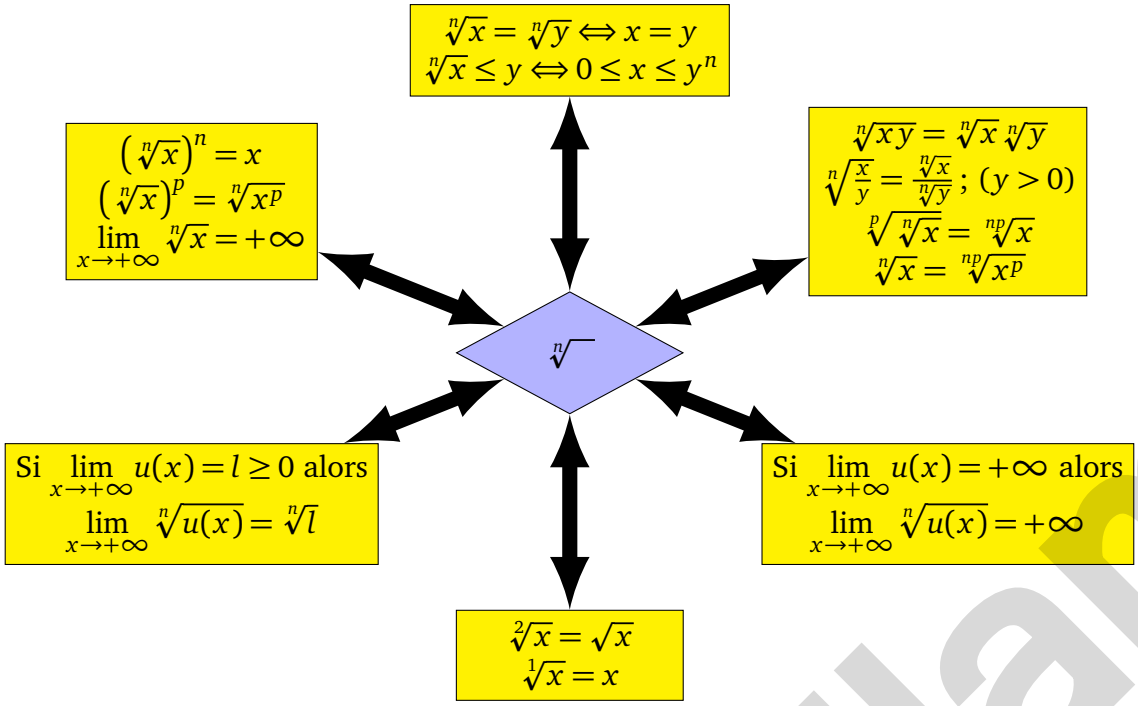
$$\begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases}$$

Fonction racine n-ème

$x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est une fonction réciproque de $x \longrightarrow x^n$ définie sur $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^+$, s'appelle la fonction racine n-ième

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today



L'expression conjuguai

Ordre 3 :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,(\forall y\in\mathbb{R}^+);\ \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,(\forall y\in\mathbb{R}^+);\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}}$$

Ordre 4 :

$$(\forall x\in\mathbb{R}^+)\,(\forall y\in\mathbb{R}^+);\ \sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[4]{x^2y}+\sqrt[4]{xy^2}+\sqrt[4]{y^3}}$$

A remarque qu'on ne peut pas factoriser : x^4+y^4

Puissance rationnelle

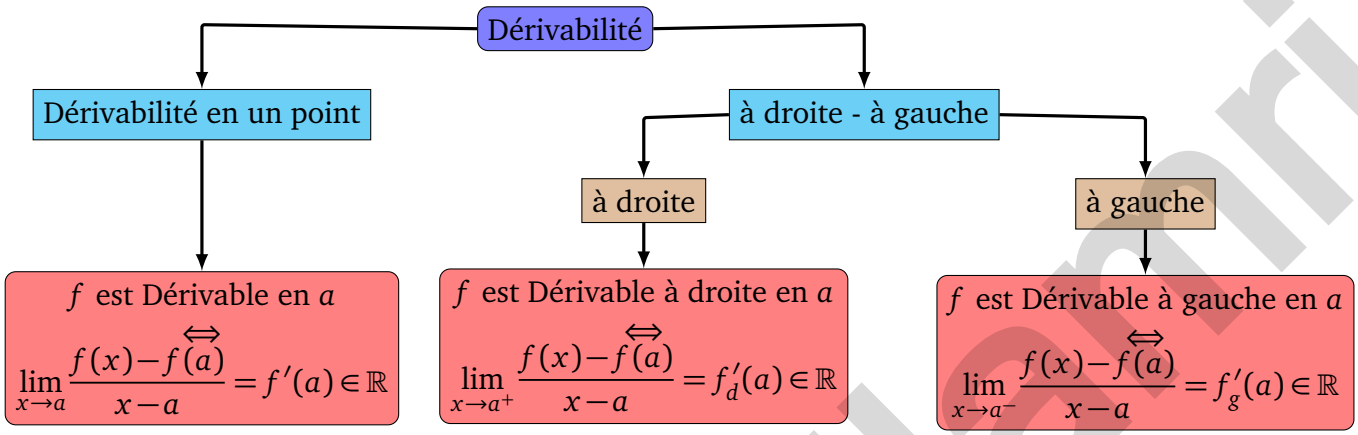
- Pour tout réel positive x et pour tout entier naturel q non nul on a : $\sqrt[q]{x}=x^{\frac{1}{q}}$
- Soit x un réel positive et r un rationnel ($r\in\mathbb{Q}$) avec $r=\frac{p}{q}$ où $p\in\mathbb{Z}$ et $q\in\mathbb{N}^*$ on a : $x^r=x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}=(\sqrt[q]{x})^p$
- $x^{r+r'}=x^r\times x^{r'}$
- $x^{r\times r'}=(x^r)^{r'}=(x^{r'})^r$
- $x^{-r}=x^r=\frac{1}{x^r}\ (x\neq 0)$
- $x^{r-r'}=\frac{x^r}{x^{r'}}$
- $(xy)^r=x^r\times y^r$
- $\left(\frac{x}{y}\right)^r=\frac{x^r}{y^r}\ (y\neq 0)$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

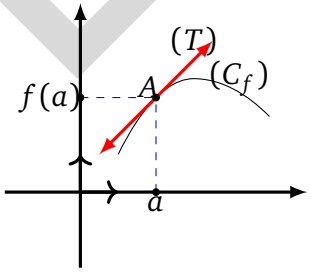
Dérivation

La Dérivabilité d'une fonction numérique



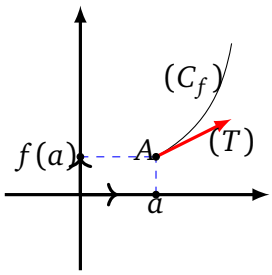
f est dérivable en $a \iff \lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$

♣ Si f est dérivable en a alors (C_f) admet une tangente en $A(a;f(a))$ d'équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.



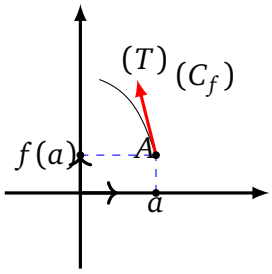
♣ Si f est dérivable à droite en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a;f(a))$ d'équation :

$$\begin{cases} y=f'_d(a)(x-a)+f(a) \\ x\geq a \end{cases}$$



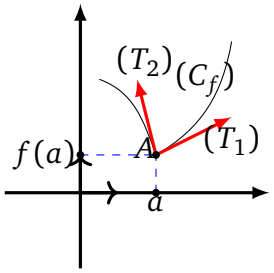
♣ Si f est dérivable à gauche en a alors (C_f) admet une demi-tangente en $A(a;f(a))$ d'équation :

$$\begin{cases} y=f'_g(a)(x-a)+f(a) \\ x\leq a \end{cases}$$

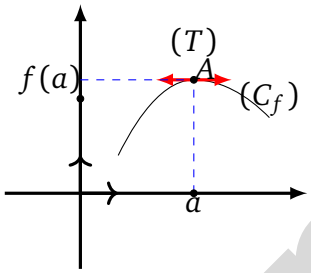


Yassine Elamri

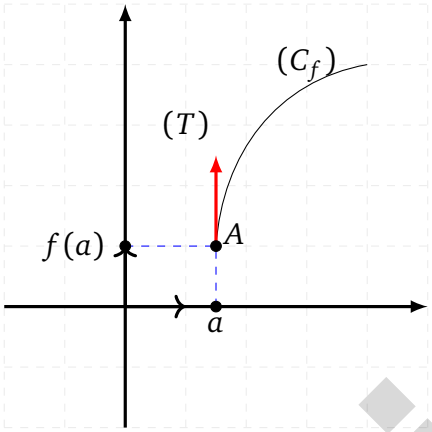
♣ Si f est dérivable à droite en a et à gauche en a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$
Alors $A(a;f(a))$ est un **point anguleux**



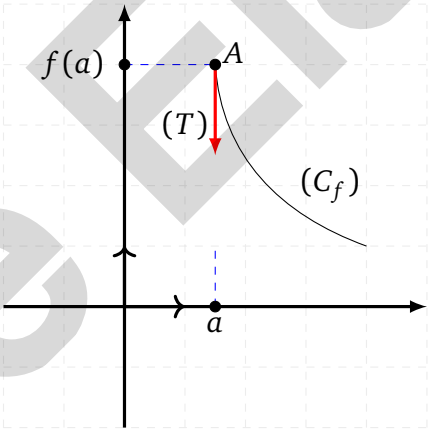
♣ Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$ la courbe admet au point d'abscisse a une tangente horizontale d'équation : $y=f(a)$.



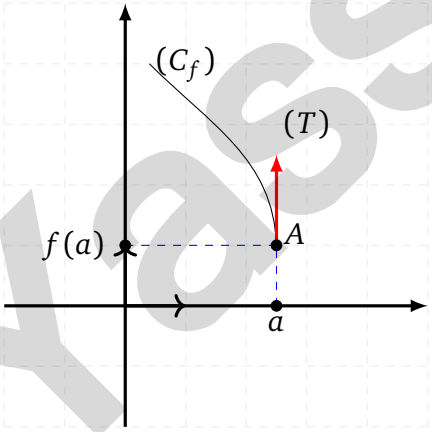
♣ Si $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ alors f n'est pas dérivable à droite (à gauche) en a, Cependant, la courbe admet au point d'abscisse a une demi-tangente verticale.



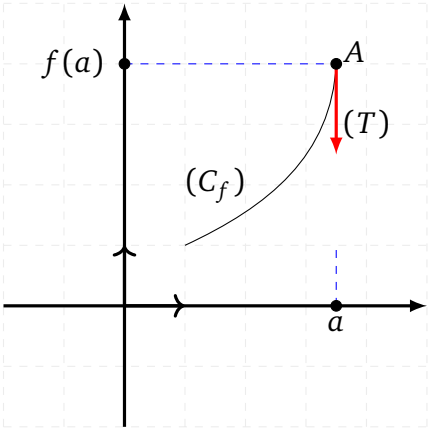
$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty$$



$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$



$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty$$

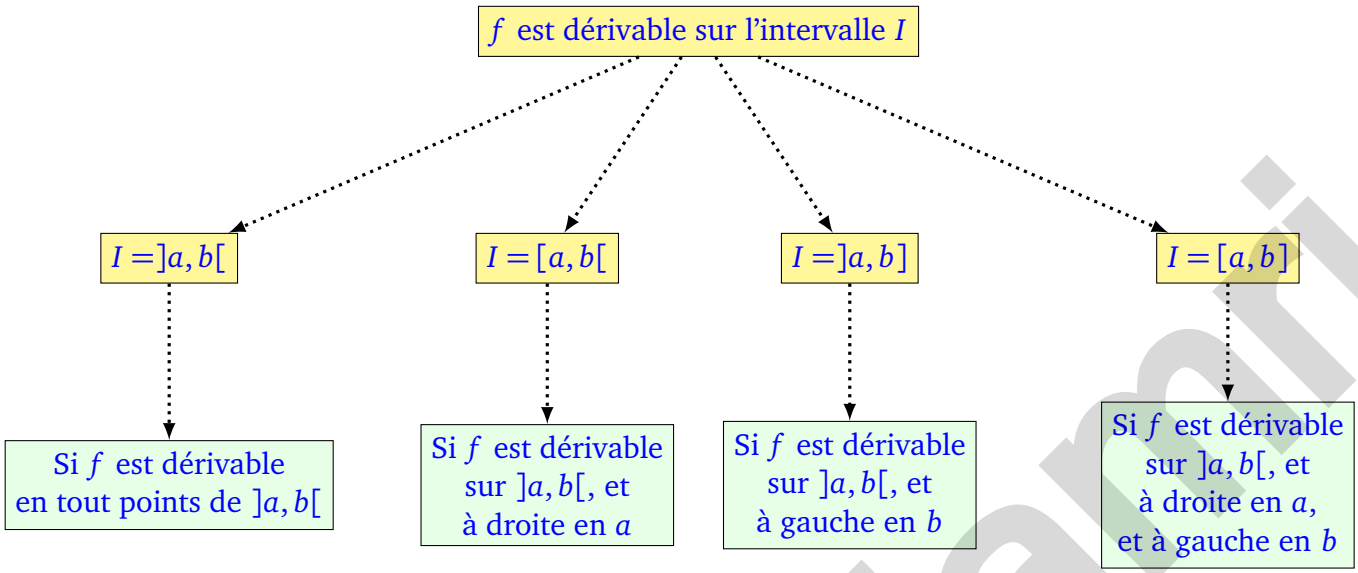


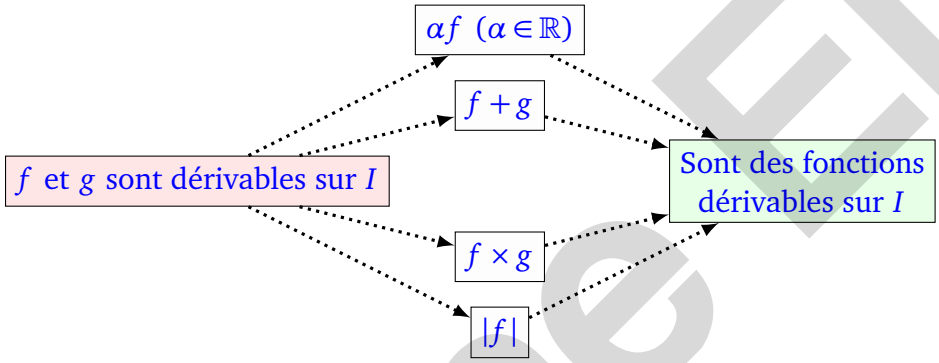
$$\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Les opérations sur les fonctions dérivées





Fonctions dérivées usuelles

La fonction f	La fonction f'	f est dérivable sur I
$x \mapsto k;;(k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n;;(n \in \mathbb{N}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1};;(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto -\sin x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin x$	$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto 1+\tan^2(x)$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2}+k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

La fonction	Sa fonction dérivé
$f+g$	$f'+g'$
af	af'
$f\times g$	$f'g+g'f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$

La fonction	Sa fonction dérivé
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'\times g-g'\times f}{g^2}$
f^n	$nf'\times f^{n-1}$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
★ Si $(\forall x\in I)\,;\,f'(x)\geqslant 0$ $(f'(x)>0)$, alors la fonction f est croissante (strictement croissante) sur I.
★ Si $(\forall x\in I)\,;\,f'(x)\leq 0$ $(f'(x)<0)$, alors la fonction f est décroissante (strictement décroissante) sur I.
★ Si $(\forall x\in I)\,;\,f'(x)=0$, alors la fonction f est constante sur I.

DÉRIVATION DE LA COMPOSITION DE DEUX FONCTIONS

$(\forall x\in I);;(g\circ f)'(x)=f'(x)\times g'(f(x))$

f est dérivable en $a\in I$
g est dérivable en $f(a)$
Alors $g\circ f$ est dérivable en a

f est dérivable sur I
g est dérivable sur $f(I)$
Alors $g\circ f$ est dérivable sur I

f est définie sur I et g définie sur J $J\subset f(I)$

Dérivabilité de $g\circ f$

Dérivation de la fonction réciproque

$$(f^{-1})'(a)=\frac{1}{f'(f^{-1}(a))}$$
$$(\forall x\in I);(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

f est dérivable en a
f' ne sannule pas en $y=f^{-1}(a)$
Alors f^{-1} est dérivable en a

f est dérivable sur I
f' ne sannule pas sur I
Alors f^{-1} est dérivable sur I

f **continue** et **strictement monotone** sur I

Dérivabilité de f^{-1}

$(\forall x\in]0;+\infty[);(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ ⟵ $\sqrt[n]{\ }$ ⟶ $(\forall x\in I);(\sqrt[n]{f(x)})'=\frac{f'(x)}{n\sqrt[n]{(f(x))^{n-1}}}$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Exercice : 1

1 Calculer les limites suivantes : ..... (3pt)

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x}-3}$

2 Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Étudier la continuité de f au point $x_0=0$ ..... (1.5pt)

3 Simplifier les nombres suivants : $A=\frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}\times\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt[12]{2}}$; $B=\frac{\sqrt{\sqrt[3]{81}\times\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}}$ ..... (2pt)

Exercice : 2

Montrer que : $\exists! c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ / $\sqrt{c+1}=\frac{-2c}{c+1}$ (utiliser T.V.I) ..... (1.75pt)

Exercice : 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$

1 Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^2$ ..... (0.5pt)

2 Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ..... (0.5pt)

3 Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ ..... (0.5pt)

4 Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 , puis interpréter le résultat obtenu ..... (1.5pt)

a Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ ..... (1.5pt)

b Étudier les variations de f sur D_f, puis donner le tableau de variations de f .. (1pt)

c Déterminer une équation cartésienne de la droite tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse 4 ..... (1pt)

5 Soit g la restriction de fonction g sur l'intervalle $[1,+\infty[$

a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ..... (1.5pt)

b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}

c Montrer que la fonction g^{-1}est dérivable en 1, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1)$ ..... (1pt)

d Calculer $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}+g^{-1}(x)-5}{x-1}$ ..... (0.75pt)

e Calculer $g^{-1}(x)$ $(\forall x\in J)$ ..... (1.5pt)

Yassine Elamri

Exercice : 1 (8 points)

1 Calculer les limites suivantes : ..... (3pt)

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{5x+3}+x-2}{\sqrt{\sqrt{x}-1}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{x-1}}-\frac{\sqrt[3]{5x-2}}{\sqrt[4]{x+2}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2\sqrt{x+2}-8}{\sqrt[3]{25+x}-3}$

2 Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-x+2}{x-1}; & x<1 \\ f(x)=\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}, & x>1 \\ f(1)=\frac{1}{3} \end{cases}$

Étudier la continuité de f au point $x_0=1$ ..... (1.5pt)

3 Montrer que $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$ est un solution d'équation $x^3-3x-18=0$ (utiliser $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$) c

4 Soit φ une fonction définie par : $\varphi(x)=\cos(x)+\cos(2x)+\cos(3x)+\cos(4x)+\cos(5x)$
Montrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\pi]$ ..... (1.5pt)

5 On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\sqrt[3]{(x^3-1)^4}$

a Étudier la dérivabilité de h en 1 ..... (1pt)

b En déduire la dérivabilité de h sur $\mathbb{R}$ ..... (1pt)

Exercice : 2

Montrer que : $\exists!c\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$ / $\sqrt{c+1}=\frac{-2c}{c+1}$ (utiliser T.V.I) ..... (1.75pt)

Exercice : 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$

1 Vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ f(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)^2$ ..... (0.5pt)

2 Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ..... (0.5pt)

3 Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$ ..... (0.5pt)

4 Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 , puis interpréter le résultat obtenu ..... (1.5pt)

a Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$ ..... (1.5pt)

b Étudier les variations de f sur D_f, puis donner le tableau de variations de f .. (1pt)

c Déterminer une équation cartésienne de la droite tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse 4 ..... (1pt)

5 Soit g la restriction de fonction g sur l'intervalle $[1,+\infty[$

a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ..... (1.5pt)

b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}

c Montrer que la fonction g^{-1}est dérivable en 1, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1)$ ..... (1pt)

d Calculer $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}+g^{-1}(x)-\sqrt[3]{4}-1}{x-4}$ ..... (0.75pt)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

e Calculer $g^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$ ..... (1.5pt)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Solution d'exercice : 1

1 Calculons les limites suivantes :

$$\begin{aligned}
\star \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}\\
&= \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Car : $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=\frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^3}}\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
\star \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x} &= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(-\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(-\frac{\sqrt[6]{x^2}}{\sqrt[6]{x^3}}+\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2}}\right)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(-\frac{1}{\sqrt[6]{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

Car : $\left(\sqrt[3]{x}=\sqrt[6]{x^2}\ ;\ \sqrt{x}=\sqrt[4]{x^2}\ ;\ \sqrt{x}=\sqrt[6]{x^3}\ ;\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[6]{x}}=0\ \text{et}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{x}}=0\right)$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}=+\infty$

$$\begin{aligned}
\star \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x}-3} &= \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{27}}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{27(25+x)}+\sqrt[3]{27^2}\right)}{(\sqrt[3]{25+x}-\sqrt[3]{27})\left((\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{27(25+x)}+\sqrt[3]{27^2})\right)}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{27(25+x)}+\sqrt[3]{27^2}\right)}{25+x-27}\\
&= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\left(\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{27(25+x)}+\sqrt[3]{27^2}\right)}{x-2}\\
&= \lim_{x\to 2}\sqrt[3]{(25+x)^2}+\sqrt[3]{27(25+x)}+\sqrt[3]{27^2}=27
\end{aligned}$$

Yassine Flamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Donc : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x}-3}=27$

2 Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

Étudions la continuité de f au point $x_0=0$

Comme :
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} f(x) &= \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x+2-(2-x)}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}} \\ &= \frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

3 Simplifier les nombres suivants :

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}}\times\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[4]{2^3}\times\sqrt[12]{2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{2^4}\times\sqrt[6]{(2^2)^2}}{\sqrt[12]{(2^3)^3}\times\sqrt[12]{2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{2^8}}{\sqrt[12]{2^{10}}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{2^{16}}}{\sqrt[12]{2^{10}}} \\ &= \sqrt[12]{2^{16-10}} \\ &= \sqrt[12]{2^6} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \frac{\sqrt{\sqrt[3]{81}\times\sqrt[3]{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt[3]{3^4}\times\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[12]{3^6}} \\ &= \frac{\sqrt{\sqrt[3]{3^5}}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt[6]{3^3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^2}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt[6]{3^2}=\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

Donc : $A=\sqrt{2}$ et $B=\sqrt[3]{3}$

Yasmine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

• Solution d'exercice : 2

Montrons que : $\exists! c \in \left[-\frac{1}{2},0\right] / \sqrt{c+1} = \frac{-2c}{c+1}$

On considère la fonction g définie sur : $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ par $g(x) = \sqrt{x+1} + \frac{2x}{x+1}$

- On a g **est continue sur** $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ comme la somme de deux fonctions continues sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$
- g est dérivable sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ comme la somme de deux fonctions dérivables sur $\left[-\frac{1}{2},0\right]$

  et on a : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2},0\right]; g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + \frac{2}{(x+1)^2}$

  Comme : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2},0\right]; \frac{1}{2\sqrt{x+1}} > 0$ et $\frac{2}{(x+1)^2} > 0$

  Alors : $\forall x \in \left[-\frac{1}{2},0\right]; g'(x) > 0$, d'où g **est strictement croissante sur** $\left[-\frac{1}{2},0\right]$
- $g(0) = \sqrt{0+1} + \frac{2\times 0}{0+1} = 1$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{-\frac{1}{2}+1} + \frac{-2\times\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1} = \sqrt{\frac{1}{2}} - 2$

  Comme $g(0) > 0$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$, **alors** $g(0).g\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$

D'après (T.V.I) $\exists! c \in \left[-\frac{1}{2},0\right] / g(c) = 0$, donc : $g(c) = \sqrt{c+1} + \frac{2c}{c+1} = 0$

D'où : $\exists! c \in \left[-\frac{1}{2},0\right] / \sqrt{c+1} = \frac{-2c}{c+1}$

• Solution d'exercice :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

1 Vérifions que $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1 = \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$

2 Calculons : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Comme : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} - 1 = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3 Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$

Comme la fonction $x \longmapsto \sqrt{x} - 1$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

D'où $x \longmapsto \left(\sqrt{x}-1\right)^2$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Donc : f est continue sur $\mathbb{R}^+$

4 Étudions la dérivabilité de f à droite de 0 , puis interprétons le résultat obtenu

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2\sqrt{x}+1-1}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-2\sqrt{x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$$
$$=-\infty$$

Car $\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=+\infty\right)$

Comme : $\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$, alors f est non dérivable à droite de 0

Donc $(\mathscr{C}_f)$ admet une demi-tangent verticale vers le bas à droite de

a Montrons que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

On sait que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme la somme de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$, et on a :

$(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ f'(x)=1-\frac{2}{2\sqrt{x}}$
$$=1-\frac{1}{\sqrt{x}}$$
$$=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$$

Donc : $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

b Étudions les variations de f sur D_f, puis donnons le tableau des variations de f

Comme $(\forall x\in]0,+\infty[)\ ;\ \sqrt{x}>0$, alors le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est le singe de $\sqrt{x}-1$

$\sqrt{x}-1=0\Leftrightarrow x=0$

Si $0<x\leq 1\Leftrightarrow 0<\sqrt{x}\leq 1$
$$\Leftrightarrow -1<\sqrt{x}-1\leq 0$$
$$\Leftrightarrow f'(x)\leq 0$$

D'où f est strictement décroissante sur $[0,1]$

Si $x>1\Leftrightarrow \sqrt{x}\geq 1$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x}-1\geq 0$$
$$\Leftrightarrow f'(x)\geq 0$$

D'où f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Yasine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Tableau des variations de f

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	1	↗	0	↘	

c Déterminons une équation cartésienne de

sentative de f au point d'abscisse 4

On sait que f est dérivable en 4 et que $f'($

Donc : $(T): y = f'(4)(x-4)+f(4)$

D'où : $(T): y = \frac{1}{2}(x-4)+1$ car : $\left(f(4)=\right.($

Donc : $(T): y = \frac{1}{2}x-1$

5 Soit g la restriction de fonction g sur l'intervalle $[1,+\infty[$

a Montrons que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1}

- D'après (Question 3) f est continue sur $[0,+\infty[$

  Donc g est continue sur $[1,+\infty[$

- D'après (Question $4-b$) f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

  Donc g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$

Donc : la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur J

$J = g([0,+\infty[) = \left[g(1); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\right[= [1;+\infty[$

b Dressons le tableau de variations de la fonction g^{-1}

On sait que g est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc g^{-1} est strictement croissante sur $[0+\infty[$

x	0		$+\infty$
g^{-1}	0	↗	$+\infty$

htt
Yasin

https://steinmath.com sterday, tomorrow better than today

c Montrons que la fonction g^{-1}est dérivable en 1, puis déterminons $\left(g^{-1}\right)'(1)$

D'après (question $4-c$) on a $f(4)=g(4)=1$ donc $g^{-1}(1)=4$, et comme g est dérivable en 4et que $g'(4)=\frac{1}{2}\neq 0$

Donc g^{-1} est dérivable en 1

Et on a : $\left(g^{-1}\right)'(1)=\frac{1}{g'(g^{-1}(1))}=\frac{1}{g'(4)}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$

Donc : $\left(g^{-1}\right)'(1)=2$

d Calculons $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}+g^{-1}(x)-5}{x-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}+g^{-1}(x)-5}{x-1}&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-1+g^{-1}(x)-4}{x-1}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}+\frac{g^{-1}(x)-4}{x-1}\\&=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}+\frac{g^{-1}(x)-g^{-1}(1)}{x-1}\end{aligned}$$

D'après (Exercice 1 question 1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}$

Et comme : $\lim\limits_{x\to 4}$

$fracg^{-1}(x)-g^{-1}(1)x-1=\left(g^{-1}\right)'(1)=2$

Donc : $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt[3]{x}+g^{-1}(x)-5}{x-1}=\frac{1}{3}+2=\frac{7}{3},$

e Calculer $g^{-1}(x)$ $(\forall x\in J)$

$$\begin{cases}g(y)=x\\y\in[1,+\infty[\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\sqrt{y}-1)^2=x\\y\in[1,+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{y}-1=\sqrt{x}\\x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

$$\begin{cases} g(y)=x \\ y\in[1,+\infty[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y}=\sqrt{x}+1 \\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\left(\sqrt{x}+1\right)^2 \\ x\in[0,+\infty[\end{cases}$$

Donc $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ g^{-1}(x)=\left(\sqrt{x}+1\right)^2$

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today