2023/2024 — SteinMaths

Série d'exercices N : 01

Niveau : 2BACSPC-SVT

Lycée : ALMANSOUR DAHBI

Exercice : 1

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2+\sqrt{x}-4}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{4-3x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3+3x^2-5}{1-x^3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x+3-\sqrt{x+3}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{\sqrt{x}+x}$
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{1-cosx}-sin^2x-\sqrt{3}}{1-tanx}$
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+1}{|1-x^2|}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a^2x^3-2ax}{x}+1-x^2\left(a\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2$
8. $\lim\limits_{x\to -a}\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{a^2x^2}{a^3+x^3}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}-2}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}$

Exercice : 2

1. Déterminer la valeur de α pour laquelle la fonction g soit continue au point x_0
   - a. $\begin{cases} g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-1}}, & x\neq 1 \\ g(1)=\alpha \end{cases}$; $x_0=1$
   - b. $\begin{cases} g(x)=\dfrac{2\tan(x)+\sin(x)}{x}, & x\neq 0 \\ g(0)=\alpha \end{cases}$; $x_0=0$
2. Déterminer les valeurs de a et b pour lesquelles la fonction h soit continue au point x_0
   - a. $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt{2x+2}-x^2-a}{x-1}, & x\neq 1 \\ h(1)=b-3a \end{cases}$; $x_0=1$
   - b. $\begin{cases} h(x)=\dfrac{\sqrt{\cos(x)+3}-2(x-a)}{x}, & x\neq 1 \\ h(1)=b^2-a \end{cases}$; $x_0=0$
   - c. $\begin{cases} h(x)=\dfrac{-2(x-a)^2}{+}3x-a+3x, & x\neq 0 \\ h(0)=b^2+3b-4 \end{cases}$; $x_0=0$

Yassine Elamri

Exercice : 3

Étudier la continuité de la fonction f à droite et à gauche de x_0

1 $(x_0 = 2)$
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2} & ; x > 2 \\ f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x-2} & ; x < 2 \\ f(2) = -\dfrac{9}{4} \end{cases}$$

2 $(x_0 = 4)$
$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{16-x^2}{|x-4|} & ; x \neq 4 \\ f(4) = 8 \end{cases}$$

3 $(x_0 = 1)$
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3+2x^2-2x-1}{x+\sqrt{x}+\sin(x-1)-2} - 1 & ; x > 1 \\ f(x) = \dfrac{x^3-1}{x-1} & ; x < 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

Exercice : 4

1 Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

a Dresser le tableau de variations de la fonction f

b Déterminer les images des intervalles suivants : $]-1, 0]$; $[1, 2]$; $[4, 5[$; $[-3, +\infty[$

2 On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{a}\right\}$ par : $g(x) = \dfrac{-2ax-1}{ax+1}$;
avec $(a \in \mathbb{R}^*)$

a Étudier les variations de g selon les valeurs de a

b On pose $a > 1$. Déterminer les images des intervalles suivants : $\left[-a-2, -a-\dfrac{1}{a}\right]$; $\left]\dfrac{1}{a}, a^2\right]$ et $[a, +\infty[$

Exercice : 5

Soient g une fonction numérique continue dérivable deux fois sur $[-6, 4]$ et g' sa fonction dérivée définie par le tableau des variations ce-dessous :

x	-6		-1		1		4
$g'(x)$	-8	↗	7	↘	2	↗	5

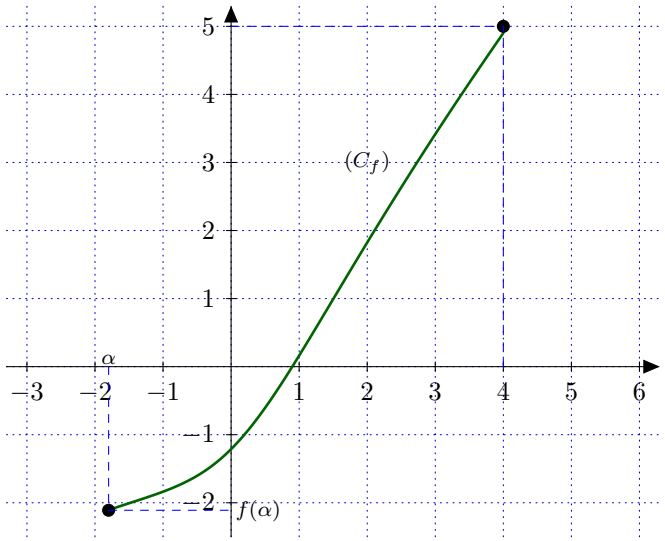
1 a Montrer que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[-6, 4]$

b Étudier le singe de $g'(x)$ sur $[-6, 4]$

c En déduire le sens des variations de g

2 On considère la fonction f la restriction de la fonction g sur $[\alpha, 4]$, définie par la courbe (C_f) si-dessous :

Yassine Elamri



a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b Dresser le tableau des variations de la fonction f^{-1}

Exercice : 6

Montrer que : $\exists! c \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \ / \ \sqrt{c+1} = \frac{-2c}{c+1}$

Exercice : 7

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $(\forall x \in \mathbb{R})\ ((f(x))^2 = 1$
Démontrer que $f = 1$ ou $f = -1$

Exercice : 8

soient g et φ deux fonctions définie sur$[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1)$ et
$g(x) = \varphi\left(x + \frac{1}{2}\right) - \varphi(x)$.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Exercice : 9

Soit f une fonction définie par : f(x) $= x + 1 + 2\sqrt{x-1}$

1 Déterminer D_f puis étudier la continuité de f sur D_f

2 Étudier la monotonie de f sur D_f puis dresser la table des variation de f

3 Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle J qui peut déterminer

4 Déterminer $f^{-1}(x)$

Exercice : 10

Soit ϕ une fonction continue positive sur $\mathbb{R}^*$ telle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\phi(x)}{x} < 1$
Montrer que l'équation $\phi(x) = x$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}^*$

Exercice : 11

1 Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f réalise une bijection de I sur un intervalle J à déterminer, puis déterminer une expression de f^{-1} pour tout $x \in J$

Yassine Elamri

► $f(x) = x^2 - 2x + 5$ et $I = [1, +\infty[$

► $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ et $I =]-\infty, 2[$

► $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$ et $I =]-\infty, 0[$

► $f(x) = \dfrac{x}{x^2+2}$ et $I = [0, \sqrt{2}]$

2 On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}

c Calculer $f^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$

Exercice : 12

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $x^5 = 1$
- $(x^2 - 1)^3 = -27$
- $\sqrt[5]{x} - 5\sqrt[10]{x} + 6 = 0$
- $\sqrt[8]{x} - x = 0$
- $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$

Exercice : 13

1 Simplifier les nombres suivants :

$$A = \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{16}} \times \sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt[4]{2^3} \times \sqrt[12]{2}} \quad ; \quad B = \frac{\sqrt{\sqrt[3]{81} \times \sqrt[3]{3}}}{\sqrt{\sqrt[3]{\sqrt{729}}}}$$

2 Rendre le dénominateur rationnel :

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2} - 2} \qquad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1}$$

3 Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7} - 3}{x^2 + x - 2} \quad ; \quad \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4} - \sqrt{x}}{x-4} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4} - 2}{2x^2 + x - 3} \quad ; \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[4]{2x-1} - 1}{\sqrt[4]{2x+8} - 2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{\sqrt[3]{25+x} - 3}$$

Exercice : 14

Soient x et y deux réels non nuls, simplifier les nombres suivants :

1 $A = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{1}{6}} \times 9^{\frac{3}{4}}}$

2 $B = \dfrac{(xy)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[6]{x^{-2}}}{x^{\frac{3}{4}} \sqrt[6]{xy}}$

3 $C = \dfrac{\left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[4]{\frac{x}{y}} \times \sqrt[6]{x^{-4}}}{(yx)^{\frac{1}{4}} \sqrt[12]{xy}}$

Exercice : 15

1 Montrer que :

$2\sqrt[4]{6561} - 5\sqrt[3]{27} - 3\sqrt[4]{256} = -18$

Yassine Elamri

2 Montrer que : $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1} = \sqrt[3]{2}-1$

3 Montrer que la solution de cette équation $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}} = \sqrt[6]{x}$ est $\dfrac{1}{4}$

4 calcule les limites suivants :

a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{2x+2}-2}$

b $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}$

c $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$

d $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x+\sqrt[3]{1-x}$

Exercice : 16

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt[3]{x^2+x}$

1 Détermine D_f puis calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 Montrer que $f(x) = 0$ admet au moins une solution en l'intervalle $[1;2]$

3 Soit g une fonction définie en $I =]-\infty;1]$ tels que : $g(x) = f(x)$

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur l'intervalle J, à déterminer

b Détermine g^{-1} pour tout x $\in J$

Yassine Elamri