2023/2024 | **Série d'exercices** | Niveau : 2BACSPC-SVT

SteinMaths | **N° : 08** | Lycée : ALMANSOUR DAHBI

Exercice : 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z+i+1=iz+3$
2. $2iz-3=z-i$
3. $8+3i+iz+7(z-4i)=0$
4. $(9+i)z=3+i-iz$
5. $\dfrac{z+1-i}{z+2+i}=3i$
6. $\dfrac{4z+1}{iz+1}=\dfrac{4+i}{3}$

Exercice : 2

Déterminer dans chaque cas l'ensemble des points $M(z)$.

1. $(z-i)(\bar{z}-1)\in\mathbb{R}$
2. $(z^2-z)\in\mathbb{R}$
3. $\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{i}{z}\right)\in\mathbb{R}$
4. $\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right)\in\mathbb{R}$
5. $\left(\dfrac{z+1}{z-2i}\right)\in i\mathbb{R}$
6. $\left(\dfrac{z+1+i}{z-i}\right)\in\mathbb{R}$
7. $\left(\dfrac{iz-1}{z+2i}\right)\in i\mathbb{R}$
8. $\left(\dfrac{z(1+i)-i}{z+1}\right)\in i\mathbb{R}$
9. $\left(\dfrac{z(1+i)-i}{z+1}\right)\in\mathbb{R}$
10. $\left|2z+1+i\right|=2$
11. $\left|z-1+i\right|=\left|z+1+2i\right|$
12. $\left|z+i\right|=\left|\bar{z}-i\right|$
13. $\left|\dfrac{\bar{z}}{z-2i}\right|=3$

Exercice : 3

On considère dans un plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{e_1},\vec{e_2})$ les points $A_{(1+i)}$; $B_{(2-2i\sqrt{3})}$; $C_{(i)}$ et $D_{(d)}$

1. Montrer que les points A ; B et C ne sont pas alignés
2. Déterminer la valeur de d pour que $ABCD$ soit un parallélogramme
3. a. Montrer que : $\dfrac{z_A}{z_C}=\overline{z_A}$
   b. En déduire que $\left(\dfrac{z_A}{z_C}\right)^{2024}=2^{1012}$
4. a. Écrire sous forme trigonométrique les nombres suivantes : z_A et z_B
   b. En déduire une écriture trigonométrique des nombres $\dfrac{z_A}{z_B}$ et $(z_Az_B)^{12}$
   c. Écrire sous forme algébrique le nombre $\dfrac{z_A}{z_B}$
   d. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

Exercice : 4

1. On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement : $a=1$, $b=5+2i$ et $c=-1+4i$.
   a. Écrire sous forme trigonométrique le nombre : $\dfrac{c-a}{b-a}$.
   b. Déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.
   c. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que : $|z-b|=|z-a|$.
2. On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement : $a=2i$, $b=-\sqrt{3}-i$ et $c=\sqrt{3}-i$.

Yassine Elamri

a Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.

c Déduire que le triangle ABC est équilatéral.

3 On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement : $a = 3+5i$, $b = 3-5i$ et $c = 7+3i$.

a Montrer que : $\dfrac{b-c}{a-c} = 2i$.

b Déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$.

4 On considère les points A, B, C et D dont les affixes sont respectivement : $a = \sqrt{3}+i$, $b = \sqrt{3}-i$, $c = 2\sqrt{3}$ et $d = 2\sqrt{3}+2i$.

a Calculer : $\dfrac{c-a}{d-b}$ puis déduire que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

b Montrer que : $\omega = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$ est l'affixe du point Ω milieu du segment $[AC]$.

c Vérifier que Ω est le milieu du segment $[BD]$.

d Déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

5 On considère les points A, B, C et D dont les affixes sont respectivement : $z_A = -1+2i$, $z_B = 4+3i$, $z_C = 3i$ et $z_D = 4-3i$.

a Montrer que : $\dfrac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \dfrac{1}{5}i$ et $\dfrac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = -\dfrac{2}{3}i$.

b Déduire la nature des triangles ACD et BCD.

c Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle (C) dont on détermine le rayon et l'affixe du centre I.

6 On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement : $z_A = 2+i$, $z_A = 3i$ et $z_A = 1$.

a Déterminer la forme trigonométrique du nombre complexe : $\dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_C}$.

b Déduire la nature du triangle ABC.

c Déterminer l'affixe du point D de façon que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

d Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice : 5

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$

On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement : $a = 1+mi$, $b = -1$ et $c = 2+i$ avec $m \in \mathbb{R}$.

1 Déterminer m tels que les points A, B et C soit alignés.

2 Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{m^2-m-2}{m^2+4} + i\dfrac{3m-2}{m^2+4}$.

3 Déterminer m pour que le triangle ABC soit rectangle en A.

Exercice : 6

Soit z un nombre complexe tel que : $z \neq i$ et posons $U = \dfrac{1+iz}{\bar{z}+i}$

1 Calculer U pour $z = 1-i$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $U = 2$.

Yassine Elamri

3 a Écrire $\bar{U}$ en fonction de z et $\bar{z}$.

b Montrer que : $\bar{U} = -U \iff (z+\bar{z})(i(z-\bar{z})+2) = 0$

c Déduire (E) l'ensemble des points $M(z)$ pour que U soit un nombre purement imaginaire.

Exercice : 7

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement : $a = -2i$, $b = -\sqrt{3}+i$ et $c = \sqrt{3}+i$.

1 Déterminer la forme trigonométrique de b et de c.

2 a Montrer que : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

b Déduire la nature du triangle ABC.

3 Déterminer d l'affixe du point D pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

4 Calculer $Z = b^{10} + a^{10}$.

Exercice : 8

Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points dans le plan complexe avec $z_A = \sqrt{6}+i\sqrt{2}$ et $z_B = 2-2i$.

1 a Déterminer la forme trigonométrique de z_A et z_B.

b Déterminer une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}})$.

2 Déterminer la forme trigonométrique de nombre complexe $\dfrac{z_A}{z_B}$, et déduire $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Exercice : 9

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$

On considère les points A, B et C dont les affixes sont respectivement : $a = -1-i$, $b = 5+i$ et $c = 3+7i$.

1 Calculer le nombre $\dfrac{b-a}{b-c}$ et déduire la nature du triangle ABC.

2 Déterminer d l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

3 Vérifier que $\dfrac{c-a}{d-b} = -i$ et donner une interprétation géométrique au résultat obtenue.

4 Déduire la nature de $ABCD$.

Exercice : 10

le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Posons $(\forall x \in \mathbb{C});\ f(z) = \dfrac{z}{z-i}$

1 Déterminer la forme algébrique du nombre $f(3+2i)$.

2 a Vérifier que : $\overline{f(z)} = -f(z) \iff 2z\bar{z} + i(z-\bar{z}) = 0$.

b déduire l'ensemble des points $M(z)$ dans le plan complexe tel que : $f(z) \in i\mathbb{R}$.

3 Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $f(z) = \dfrac{2}{\bar{z}}$.

4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $f(z) = z+i$.

5 On considère les points : $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ tel que : $a = 1+i\sqrt{3}$, $b = 1-i\sqrt{3}$ et $c = -2$

a Écrire a et b sous forme exponentiel.

Yassine Elamri

b Déduire que : $\left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1$.

c Vérifier que : $\frac{b-c}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, puis déduire la nature du triangle ABC.

d Déterminer l'affixe du point D tel que $ACBD$ soit un losange.

Exercice : 11

Examen National 2022 session rattrapage

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $Z_A = 1 + 5i$, $Z_B = 1 - 5i$ et $Z_C = 5 - 3i$.

1 Déterminer le nombre complexe Z_D affixe du point D milieu du segment $[AC]$.

2 Soit h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
Déterminer le nombre complexe Z_E affixe du point E l'image de point B par h.

3 On considère la rotation R de centre C d'angle $\left(\frac{-\pi}{2}\right)$, déterminer l'image de B par R.

4 Soit F le point d'affixe $Z_F = -1 + i$

a Vérifier que : $\frac{Z_D - Z_A}{Z_F - Z_A} \times \frac{Z_F - Z_E}{Z_D - Z_E} = -1$

b En déduire que $\overline{(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})} + \overline{(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})} \equiv \pi[2\pi]$.

c Déterminer la forme trigonométrique du nombre $\frac{Z_E - Z_F}{Z_A - Z_F}$ et déduire la nature du triangle AEF.

d Déduire que les points A, D, E et F appartiennent à un cercle dont on déterminera un diamètre.

Exercice : 12

Examen National 2022 session normal

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $a = -1 - i\sqrt{3}$, le point B d'affixe $b = -1 + i\sqrt{3}$ et la translation t de vecteur $\overrightarrow{OA}$

1 Prouver que l'affixe du point D image du point B par la translation t est $d = -2$

2 On considère la rotation R de centre D et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.
Montrer que l'affixe du point C image du point B par la rotation R est $c = -4$

3 a Écrire le nombre $\frac{b-c}{a-c}$ sous forme trigonométrique

b En déduire que $\left(\frac{b-c}{a-c}\right)^2 = \frac{c-d}{b-d}$

4 Soient (Γ) le cercle de centre D et de rayon 2, (Γ') le cercle de centre O et de rayon 4 et M un point d'affixe z appartient aux deux cercles (Γ) et (Γ')

a Vérifier que $|z + 2| = 2$

b Prouver que $z + \bar{z} = -8$ (remarquer que $|z| = 4$)

c En déduire que les cercles (Γ) et (Γ') se coupent en un point unique qu'on déterminera

Exercice : 13

Examen National 2021 session normal

Yassine Elamri

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation : $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$
2. Soient les nombres complexes $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
   a. Écrire a sous forme algébrique .
   b. Vérifier que $\overline{a}b = \sqrt{3}$

   Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et $\overline{a}$.
3. Montrer que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport.
4. Soient zl'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
   a. Écrire z' en fonction de z et a
   b. Soit d l'affixe du point D image de C par la rotation R, montrer que $d = a + 1$.
   c. Soit I le point d'affixe le nombre 1 , montrer que $ADIO$ est un losange.
5. a. Vérifier que $d - b = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1 - i)$; en déduire un argument du nombre $d - b$
   b. Écrire le nombre $1 - b$ sous forme trigonométrique.
   c. Déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BD}\right)$

Exercice : 14

Examen National 2021 session rattrapage

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation :$z^2 - 6z + 13 = 0$
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que :$a = 3 + 2i$; $b = 3 - 2i$ et $c = -1 - 2i$.
   a. Écrire $\frac{c-b}{a-b}$ sous forme trigonométrique
   b. En déduire la nature de triangle ABC
3. Soit R la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soit M un point du plan d'affixe z et le point M' d'affixe z' l'image de M par R, et soit D le point d'affixe $d = -3 - 4i$.
   a. Écrire z' en fonction de z
   b. Vérifier que C est l'image de point A par R.
4. a. Montrer que les point A, C et D sont alignés.
   b. Déterminera le rapport de l'homothétie h de centre C et qui transforme A en D
   c. Déterminera l'affixe m du point E pour que la quadrilatère $BCDE$ soit un parallélogramme.
5. a. Montrer que $\frac{d-a}{m-b}$ est un nombre réel.
   b. En déduire que quadrilatère $ABED$ est un trapèze isocèle.

Exercice : 15

Examen National 2020 session normal

Yassine Elamri

1 Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation :

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z + 16 = 0$$

a Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2$.

b En déduire les solution de l'équation (E) .

2 Soient les nombres complexes :

$$a = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) + i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \quad , \quad b = 1 + i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{2} + i\sqrt{2}.$$

a Vérifier que $b\bar{c} = a$, puis en déduire que $ac = 4b$.

b Écrire les nombres complexes b et c sous forme trigonométrique..

c En déduire que : $a = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$.

3 Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, On considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que $d = a^4$.
Soient z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{12}$

a Vérifier que : $z' = \frac{1}{4}az$.

b Déterminer l'image du point C par la rotation R .

c Déterminer la nature du triangle OBC.

d Montrer que $a^4 = 128b$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés .

Exercice : 16

Examen National 2020 session rattrapage

1 Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

2 On pose $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$.

a Écrire a sous forme trigonométrique et en déduire que a^{2020} est un nombre réel.

b Soit le nombre complexe $b = \cos(\frac{\pi}{8}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8})$. Prouver que $b^2 = a$.

3 On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c tel que $c = 1$. La rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point M d'affixe z au point M' d'affixe z'.

a Vérifier que $z' = bz$.

b Déterminer l'image de C par la rotation R et montrer que A est l'image de B par R.

4 a Montrer que $|a-b| = |b-c|$ puis déduire la nature du triangle ABC.

b Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right)$.

5 Soit T la translation du vecteur $\overrightarrow{u}$ et D l'image de A par la translation T.

a Vérifier que l'affixe de D est $b^2 + 1$.

b Montrer que $\frac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}$ et en déduire que les points O, B et D sont alignés.

Yassine Elamri