2023/2024 | **Série d'exercices** | Niveau : 2BACSPC-SVT

SteinMaths | **N° : 07** | Lycée : ALMANSOUR DAHBI

Exercice : 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\exp(x) = \mathrm{e}$
2. $\mathrm{e}^{x^2+5} = \left(\mathrm{e}^{x+2}\right)^2$
3. $\exp(-x) = 1$
4. $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} = 0$
5. $\exp(2x-1) = \mathrm{e}$
6. $\mathrm{e}^{3x+1} = \mathrm{e}^{-2x+3}$
7. $\mathrm{e}^{x^2+x} = 1$
8. $\mathrm{e}^{2x} - 1 = 0$
9. $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} = 0$

Exercice : 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $\exp(x) < \mathrm{e}$
2. $\mathrm{e}^{-x} > 0$
3. $\exp(-x) \geqslant 1$
4. $\mathrm{e}^{-x} > 1$
5. $\mathrm{e}^{2x-1} > \mathrm{e}^{x}$
6. $\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 0$
7. $\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} < 2$
8. $\mathrm{e}^{2x} - 1 \geqslant 0$
9. $e^{x} < 1$
10. $x\mathrm{e}^{-x} - 3\mathrm{e}^{-x} < 0$

Exercice : 3

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} \mathrm{e}^{x-1} + \mathrm{e}^{y} = 2 \\ \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{y+1} = 0 \\ \mathrm{e}^{x+2} + 2\mathrm{e}^{y-3} = 3 \\ \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y} = \mathrm{e} \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{y} = 2 \\ x + y = 0 \\ xy = 3 \\ \mathrm{e}^{x+1}\mathrm{e}^{y+1} = 1 \end{cases}$

Exercice : 4

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2}e^{-x}$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-3x}}{3x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{x}(x-1)$
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} (\mathrm{e}^{-x} + 3x + 1)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x}+1}{e^{-x}-1}$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty} (e^{-2x} - e^{-x})$

Exercice : 5

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer $f'(x)$, puis les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

1. $f(x) = e^{4x+1}$
2. $f(x) = e^{x}\sin x$
3. $f(x) = e^{x} + x^2 + 1$
4. $f(x) = \dfrac{3x+1-e^{x}}{e^{x}}$
5. $f(x) = 5e^{x} + 5xe^{x}$
6. $f(x) = e^{-x} + x^{-1}$

Exercice : 6

Étudier Ia fonction f définie par $f(x)$ (ses variations, ses limites aux bornes de son ensemble de définition et les asymptotes à sa courbe représentative $\mathcal{C}$).

1. $f(x) = e^{3x+5}$
2. $f(x) = e^{-2x^2+5x+3}$
3. $f(x) = e^{5x^2}$
4. $f(x) = e^{\sqrt{1-x}}$
5. $f(x) = e^{3(x+1)^2-12}$
6. $f(x) = e^{\frac{2x-3}{x}}$

Yassine Elamri

Exercice : 7

À la sortie d'un four industriel, un objet refroidit au cours du temps. Sa température en degrés Siliceuse (°C) à l' instant t en heures est donnée par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$par :

$$f(t) = ae^{-\frac{t}{2}} + b \text{ et } f'(t) + \frac{1}{2}f(t) = 10.$$

1. Déterminer $f(t)$ pour $t \geqslant 0$, sachant qu'initialement, la température de l'objet est 220°C.
2. a. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.
   b. Étudier la limite de f en $+\infty$. Quelle interprétation peut-on en donner ?
   Quelle interprétation peut-on en donner ?
3. Déterminer le moment à la minute près où la température de l'objet est 50°C.
4. Soit la suite $(d_n)_{n\geqslant 0}$ oti $d_n = f(n) - f(n+1)$ est l'abaissement de température de l'objet entre l'heure n et l'heure $n+1$.
   a. Calculer d_0, d_1 et d_2 au dixième près.
   b. Quelle est la limite de d_n quand n tend vers $+\infty$?
   c. Démontrer que (d_{nn}) est décroissante.
   d. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n à partir de laquelle l'abaissement de température est inférieur à 5°C.

Exercice : 8

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$

1. Soit la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x^2e^x - 1$
   a. Étudier le sens de variation de la fonction g.
   b. Démontrer qu'il existe un unique réel $a \geqslant 0$ tel que $g(a) = 0$. Démontrer que $a \in [0,703; 0,704[$.
   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.
2. a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   b. Justifier que f est dérivable sur $]0;+\infty[$, Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   c. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation sur $]0;+\infty[$.
   d. Démontrer que $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$ est le minimum de f.
   e. Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

1- Examen national (R2008)

I- On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$

1. Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis montrer que g est croissante sur $[0, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 0]$.
2. En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ (remarquer que $g(0) = 1$)

II- On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2x\right)$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Yassine Elamri

b Vérifier que : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{e^{2x}}{x} - 2\right)\dfrac{\ln\left(e^{2x}-2x\right)}{e^{2x}-2x}$ pour tout x de $\mathbb{R}^*$

c Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 0$ (on rappelle : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln t}{t} = 0$).

d En déduire que la courbe (C) admet, au voisinage de $-\infty$, un branche parabolique dont on précisera la direction .

2 a Pour tout x de $[0,+\infty[$, vérifier que :

$$1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0 \text{ et que } 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right) = f(x).$$

b En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (on rappelle : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^u}{u} = +\infty$).

c Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

d Montrer que : $f(x) - 2x \leqslant 0$ pour tout x de $[0,+\infty[$ et en déduire que (C) est en-dessous de (D) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3 a Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = \dfrac{2\left(e^{2x}-1\right)}{g(x)}$

b Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

4 Tracer (C) et (D) dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$
(On admet que la courbe (C) a deux points d'inflexions).

2- Examen national (N20009)

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ et soit (C) la courbe représentative de la f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 a Vérifier que : $f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{e^{-2x}+1}\right)$, pour tout x de $\mathbb{R}$.

b Montrer que la fonction f est paire et que : $f(x) - x = \dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$ puis en déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est un asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

2 Montrer que la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

3 a Montrer que : $f'(x) = \dfrac{e^{4x}-1+4xe^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$ pour tout réel x et vérifier que $f'(0) = 0$.

b Montrer que : $e^{4x} - 1 \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$ puis en déduire que $e^{4x} - 1 + 4xe^{2x} \geq 0$ pour tout x de l'intervalle $[0,+\infty[$.

c Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

4 Construire la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$
(On admet que la courbe (C) possède deux points d'inflexion que l'on ne demande pas de préciser).

3- Examen national (N2020)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{N}$ par : $f(x) = -x + \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2}-4\right)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 2 cm).

Yassine Elamri

1 Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2 a Démontrer que la droite (Δ) d'équation : $y = -x + \dfrac{5}{2}$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

b Résoudre l'équation $e^{x-2} - 4 = 0$ puis montrer que la courbe (C) est au dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; 2+\ln 4]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[2+\ln 4; +\infty[$.

3 Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

4 a Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ $f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$.

b Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5 Calculer $f''(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis montrer que $A(2,2)$ est un point d'inflexion de (C).

6 Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$.

7 Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ ci-dessous (on prend $\ln 2 \simeq 0,7$ et $\ln 3 \simeq 1,1$).

8 a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.

b Construire dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice du repère).

c Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2-\ln 3)$ (Remarquer que $f^{-1}(2-\ln 3) = 2+\ln 3$).

4- Examen national (N2022)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2$.
Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ (unité : 1 cm)

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter géométriquement le résultat

3 a Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

b Étudier le signe de $(f(x) - x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et en déduire la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ)

4 a Montrer que $f'(x) = \left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 + xe^{\frac{x}{2}}\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$

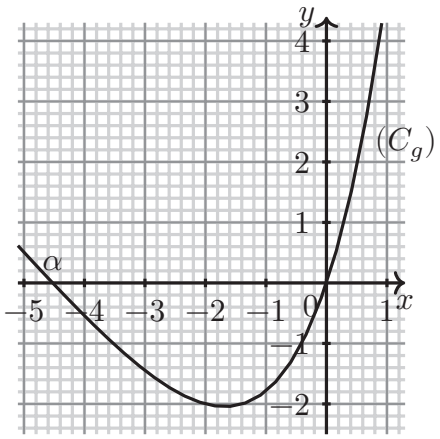
b Vérifier que $x\left(e^{\frac{x}{2}} - 1\right) \geq 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis en déduire le signe de la fonction dérivée f' sur $\mathbb{R}$

c Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$

5 a Montrer que $f''(x) = \dfrac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}g(x)$
où $g(x) = (2x+4)\,e^{\frac{x}{2}} - x - 4$ pour tout x de $\mathbb{R}$

b A partir de la courbe ci-contre de la fonction g, déterminer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$ (Remarque : $g(\alpha) = 0$)

c Étudier la concavité de la courbe (C) et déterminer les abscisses des deux points d'inflexions.



6 Construire la courbe (C) dans le repère $\left(O;i;j\right)$
(On prend : $\ln(4) \simeq 1,4$; $\alpha \simeq -4,5$ et $f(\alpha) \simeq -3,5$)

7 a Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

b Calculer $\left(f^{-1}\right)'(\ln(4))$

8 Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

Yassine Elamri

a Montrer par récurrence que $0 < u_n < \ln(4)$ pour tout n de $\mathbb{N}$

b Montrer que la suite (u_n) est décroissante

c En déduire que la suite (u_n) est convergente

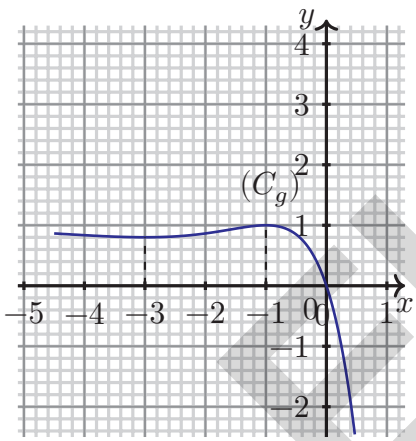
d Calculer la limite de la suite (u_n)

5- Examen national

Partie I : Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$.

1 Vérifier que : $g(0) = 0$.

2 A partir de la représentation graphique de la fonction g (voir figure ci-après)



Montrer que $g(x) \geq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-\infty, 0]$ et que $g(x) \leq 0$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$.

partie II : On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 1 - (x^2+1)\,e^x$

Soit (C_f) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm).

1 a Vérifier que : $f(x) = x + 1 - 4\left(\frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$ pour tout réel x puis en déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

b Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (x+1)]$ et en déduire que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$.

c Montrer que la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (D).

2 a Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ (on pourra écrire $f(x)$ sous la forme $x\left[1 + \frac{1}{x} - \left(x + \frac{1}{x}\right)e^x\right]$)

b Montrer que la courbe (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique dont on précisera la direction.

3 a Montrer que $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x.

b Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty, 0]$ et décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

c Montrer que la courbe (C_f) possède un deux points d'inflexion d'abscisses -3 et -1 .

4 Construire, dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, la droite (D) et la courbe (C_f).(on prendra $f(-3) \approx -2,5$ et $f(-1) \approx -0,7$).

5 Vérifier que la fonction $H : x \mapsto (x-1)e^x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto xe^x$ sur $\mathbb{R}$

Yassine Elamri