2023/2024 | **Série d'exercices** | Niveau : 2BACSPC-SVT

SteinMaths | **$N^\circ$ : 05** | Lycée : ALMANSOUR DAHBI

## Exercice : 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{3}{1-\ln(x)}$
2. $g(x) = \ln(5-x) + \ln(x^2-3)$
3. $u(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{\ln^2(x)}$
4. $v(x) = \ln\left(\dfrac{\ln(x+1)}{1-\ln(x)}\right)$
5. $\alpha(x) = \sqrt{\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2}$
6. $\varphi(x) = \ln\left(\dfrac{x^2-4}{\ln(x-6)}\right)$

## Exercice : 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

1. $\ln(\dfrac{x-1}{2}) = \ln(5)$
2. $\ln(2x+2) + \ln(x+4) = 3\ln(2)$
3. $\ln(|x+3|) - \ln(|2x|) = 0$
4. $\ln^2(x) + 3\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) + 2 = 0$
5. $\ln^3(x) - 3\ln^2(x) - 6\ln(x) + 8 = 0$
6. $\ln(-x^2+2x) = 0$
7. $\ln(x+4) + (x-1) - \ln((x+4)^2) = 0$
8. $\ln(-x^2+2x) > 0$
9. $\ln(x+4) + (x-1) - \ln((x+4)^2) \leq 0$
10. $\ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2)$
11. $\sin(\ln(x)) = \sin\left(\ln\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)$
12. $\ln(x) + \ln(x^2-5) > \ln(2) + \ln(x^2-3)$
13. $\ln^2(x) - \ln(x) - 2 < 0$

## Exercice : 3

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x$
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(-2x) + x^4$
3. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2(x)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x} - x$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(\sqrt{x}+x^2\right)}{x-1} + \dfrac{x}{\ln(x)}$
6. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)-x}{x^3+x^2-x}$
7. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin(\ln(x+1)-x)}{x^2}$
8. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\tan(x)))}{\tan(x)-1}$
9. $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$
10. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)+1\right)$

## Exercice : 4

On considère la suite $(u_n)_{n>1}$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\,;\ u_n = 1 - \dfrac{1}{n^2}$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})$
   $u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$
2. Calculer en fonction de $n$
   $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \ln(u_k)$

Yassine Elamri

3 Déterminer $\lim S_n$

**Exercice : 5**

Soient $a$ et $b$deux réels strictement positifs, montrer que $(\forall a > 0)\ (\forall b > 0)$
$\ln(2) + \frac{1}{2}(\ln(a) + \ln(b)) \leq \ln(a+b)$

**Exercice : 6**

Soit $g$ la fonction numérique définie sur $I = [a, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{x^2 - a^2}{2ax} - \ln\left(\frac{x}{a}\right)$ ; avec $a \in \mathbb{R}_+^*$

1 Étudier les variations de $g$

2 Montrer que : $(\forall x \in I)\,;\ \ln\left(\frac{x}{a}\right) < \frac{x^2 - a^2}{2ax}$

3 Montrer que : $(\forall x \in I)\,;\ 2\frac{x-a}{x+a} < \ln\left(\frac{x}{a}\right)$

**Exercice : 7**

Soient $a$ ; $b$ et $c$ trois réels strictement positifs
On considère la fonction $f$ définie par : $f(x) = \ln(abx) - 3\ln(a+b+x)$

1 Étudier les variations de $f$

2 En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\,;\ f(x) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

3 Montrer que : $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq -3\ln(3)$

4 En déduire que : $abc \leq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$

**Exercice : 8**

1 Déterminer les fonctions primitives de la fonction $f$ sur $I$ dans chaque cas :

a $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 1}$ ; $I = ]1, +\infty[$

b $f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+2}$ ; $I = ]2, +\infty[$

c $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 4}$ ; $I = \mathbb{R}$

d $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ ; $I = ]0, +\infty[$

2 On considère la fonction $f$ définie sur $]1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x+4}{x^2 + 2x - 3}$

a Déterminer les valeurs de $a$ et $b$ tels que $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+3}$

b Déterminer la fonction primitive $F$ de $f$ telle que : $F(2) = \ln(3)$

**Exercice : 9**

**Partie I**

On considère la fonction $g$ définie sur $[-1, +\infty[$ par : $\begin{cases} g(x) = x - (x+1)ln(x+1) & x > -1 \\ g(-1) = -1 \end{cases}$

1 Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

2 Montrer que $(\forall x \in ]-1, 0[ \cup ]0, +\infty[)\,;\ g'(x) = -ln(x+1)$

3 Dresser le tableau des variations de $g$, puis en déduire que : $(\forall x \in [-1, +\infty[)\ g(x) \leq 0$

Yassine Elamri

**Partie II**

On considère la fonction $f$ définie sur $]-1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{ln(x+1)-x}{x}$

Soit $(C_f)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$ avec $||\vec{i}||=2cm$ et $||\vec{j}||=2cm$

1. Étudier la continuité de $f$ au point $x_0=0$ :
2. Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ on pose $h(t)=t^2(ln(x+1)-x)-x^2(ln(t+1)-t)$
3. Étudier la dérivabilité de $f$ en 0 (Indication : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ln(x+1)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$), puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
4. Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ ; $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)$, puis donner une interprétation géométrique de ces résultats.
5. a. Montrer que : $\forall x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2(x+1)}$
   b. Étudier les variations de $f$, puis dresser sa table de variations
6. Tracer $(C_f)$ dans le repère orthonormé $\left(O,\vec{i};\vec{j}\right)$

## Exercice : 10

**Partie I**

On considère la fonction $g$ définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)$
2. a. Montrer que : $(\forall x>0)\,;\,g'(x)=-\dfrac{x+2}{x(x+1)^2}$
   b. Étudier les les variations de $g$
   c. Montrer que : $(\forall x>0)\,;\,g(x)>0$

**Partie II**

On considère la fonction $f$ définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) & ;x>0\\ f(x)=\dfrac{x}{\ln(1-x)}+1 & ;x<0\\ f(0)=0\end{cases}$

Et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1. Étudier la continuité de $f$ en 0
2. Étudier la dérivabilité de $f$ à gauche et à droite en point 0 , puis donner une interprétation géométrique de ces résultats
3. a. Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$
   b. En déduire les branches infinies de la courbe $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$
4. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}^*$
   b. Étudier les variations de $f$
5. Tracer la courbe $(C_f)$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

## Exercice : 11

Soit $f$ une fonction définie par : $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, et $(C_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

Yassine Elamri

1. Déterminer $D_f$ l'ensemble de définition de $f$
2. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b. Montrer que $(\forall x \in D_f)\,;\, f(x) = -\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$
   c. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
   d. Étudier les branches infinies de $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
3. Étudier les variation de $f$
4. Montrer que $f$ admet une fonction réciproque $f^{-1}$ définie sur un intervalle $J$ à déterminer.
5. Tracer $(C_f)$ et $(C_f^{-1})$

## Exercice : 12

On considère la fonction $h$ définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} h(x) = \dfrac{x-\ln(x+1)}{x} & x \neq 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer que $h$ est continue en 0
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}^+\,;\, 0 \leq 1 - x + x^2 - \dfrac{1}{x+1} \leq x^3$
3. En déduire que que $\forall x \in ]0,+\infty[\,;\, 0 \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ln(x+1) \leq \dfrac{x^4}{4}$
4. Étudier la dérivabilité de $h$ en 0

## Exercice : 13

On considère la fonction $g$ définie par : $g(x) = \dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\cos(x)}\right)$

1. Déterminer $D_g$ l'ensemble de la définition de la fonction $g$
2. Calculer les limite de $g$ aux borne de $D_g$

## 1- Examen national N2012

**Partie I :** Soit $g$ la fonction numérique définie sur $]0[+\infty$ par : $g(x) = x^2 - 1 + 2x^2\ln x$

1. Montrer que : $x^2-1$ et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]0[1$ puis déduire que $g(x) \leq 0$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]0]1$
2. Montrer que $x^2-1$ et $2x^2\ln x$ ont le même signe sur l'intervalle $]1[+\infty$ puis déduire que $g(x) \geq 0$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $[1[+\infty$

**Partie II :** On considère la fonction numérique $f$ définie sur $]0[+\infty$ par : $f(x) = (x^2-1)\ln x$
Et soit $(C)$ la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$(unité : **3cm**)

1. a. Montrer que : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$ puis interpréter le résultat géométriquement
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ (On pourra écrire $\dfrac{f(x)}{x}$ sous la forme $\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)\ln x$)
   et en déduire que la courbe $(C)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ dont on précisera la direction
2. a. Montrer que $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x}$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]0[+\infty$ et interpréter

Yassine Elamri

géométriquement le résultat $f'(1) = 0$

b Montrer que la fonction $f$ est décroissante sur l'intervalle $]0]1$ et croissante sur l'intervalle $[1[+\infty$

c Dresser le tableau de variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $]0[+\infty$ puis montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x$ appartenant à l'intervalle $]0[+\infty$

3 Construire la courbe $(C)$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

4 Montrer que $u : x \mapsto \dfrac{x^3}{3} - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^2 - 1$ sur $\mathbb{R}$

## 2- Examen national R2011

**I :** On considère la fonction numérique $g$ définie sur $I = ]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 1 + \ln x$

1 a Montrer que pour tout $x \in I$ : $g'(x) = \dfrac{x+1}{x}$

b Montrer que la fonction $g$ est croissante sur $I$

2 Déduire que : $g(x) \geq 0$ sur $[1, +\infty[$ et que $g(x) \leq 0$ sur $]0, 1]$ (remarquer que $g(1) = 0$)

**II :** Soit $f$ la fonction numérique définie par : $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right) \ln x$

et Soit $(C)$ la courbe de la fonction $f$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$(l'unité 1 cm)

1 a Montrer que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ et interpréter le résultat géométriquement

b Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ $\left($remarquer que pour tout $x$ de $I$ : $\dfrac{f(x)}{x} = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)\dfrac{\ln x}{x}\right)$

c Déduire que la courbe $(C)$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ qu'on détermine sa direction

2 a Montrer que pour tout $x \in I$ : $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b Déduire que $f$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]0, 1]$

c Donner le tableau de variation de $f$ sur $I$

3 Tracer $(C)$(On admettra que la courbe $(C)$ possède un seul point d'inflexion d'abscisse compris entre 1.5 et 2)

4

5 Montrer que : $H : x \longrightarrow \dfrac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \longrightarrow \dfrac{\ln x}{x}$ sur l'intervalle $I$

6

7 Vérifier que pour tout $x \in I$ : $f(x) = \ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

Yassine Elamri