2023/2024 — SteinMaths

Série d'exercices N : 04

Niveau : 2BACSPC-SVT

Lycée : ALMANSOUR DAHBI

Exercice : 1

Soit (u_n) une suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3 - 2u_n} \end{cases}$

1. Calculer $\boldsymbol{u_1}$ et $\boldsymbol{u_2}$.
2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < 1$
3. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n(u_n - 1)}{3 - 2u_n}$
   b. Montrer que la suite $(\boldsymbol{u_n})$ est décroissante.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente
4. on considère la suite (v_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \dfrac{u_n}{u_n - 1}$
5. a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$ puis calculer v_0
   b. Exprimer v_n en fonction de n
   c. Déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \dfrac{1}{1 + 3^n}$
   d. Calculer $\lim u_n$
6. On pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; S_n = v_0 + v_1 + \cdots\cdots + v_{n-1}$
   a. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,; S_n = \dfrac{-3}{2}\left(1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$
   b. Calculer $\lim S_n$

Exercice : 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n + 5} \end{cases}$

1. a. Montrer que $u_n > 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
2. Soit (v_n) une suite telle que : $v_n = \dfrac{5}{u_n}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont- on précisera son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer(v_n) puis (u_n) en fonction de n.
   c. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice : 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :

$u_n = 2n^3 - 3n^2 + 4n$	$u_n = n^2 - 5\sqrt{n}$	$u_n = \dfrac{3n^3 + 2n + 4}{n - 3}$	$u_n = \dfrac{1 - n}{\sqrt{n} + 1}$
$u_n = \sqrt{n + 1} - 2n$	$u_n = \sqrt{3n^2 + 4} - n$	$u_n = \sqrt{n}$	$2n + 1$

Yassine Elamri

Exercice : 4

1. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$u_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n}$
   a. Calculer u_1 et u_2.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n^2}{n^2+n} \leq u_n \leq \dfrac{n^2}{n^2+1}$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
2. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :
$v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$
   a. Calculer v_1 et v_2.
   b. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{n}{\sqrt{2n}} \leq v_n \leq \dfrac{n}{\sqrt{1+n}}$.
   c. En déduire la limite de la suite (v_n).

Exercice : 5

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{-1}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3(1-2u_n)} \end{cases}$

1. Montrer que $u_n < 0$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{3}$.
3. En déduire que la suite (u_n) est croissante puis qu'elle est convergente.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}| \leq \dfrac{1}{3}|u_n|$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$.
6. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice : 6

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1. a. Montrer que : $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) \leq x$.
   b. Déterminer $f([0,+\infty[)$.
2. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a. Montrer que $0 < u_n < 1$, pour tout n de $\mathbb{N}$
   b. Etudier la monotonie de la suite (u_n)
   c. En déduire que (u_n) est convergente.
   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Yassine Elamri

Exercice : 7

On considère la suite numérique un définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n} \end{cases}$

1. Montrer que $2 \leq u_n \leq \dfrac{7}{2}$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 3|$.
   b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, : |u_n - 3| \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
   c. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Soit (v_n) la suite numérique telle que :$v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer (v_n) puis u_n en fonction de n
4. On pose :$S_n = \dfrac{4}{u_0 + 1} + \dfrac{4}{u_1 + 1} + \cdots + \dfrac{4}{u_n + 1}$
   a. Montrer que $S_n = n + \dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{-1}{3}\right)^{n+1}$, pour tout n de $\mathbb{N}$.
   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

Exercice : 8

Soit (w_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq w_n \leq 2$
2. Montrer que la suite (w_n) est croissante .
3. En déduire que (w_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice : 9

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout n dans $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{1 + 4u_n}{7 - 2u_n} \end{cases}$$

1. Vérifier que : $1 - u_{n+1} = \dfrac{6(1 - u_n)}{5 + 2(1 - u_n)}$, pour tout n de $\mathbb{N}$
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - u_n > 0$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1}$
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{5}{6}$ puis exprimer v_n en fonction de n.
   b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - 2}$
   puis en déduire la limite de la suite (u_n).

Yassine Elamri

Exercice : 10

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{2u_n + 3} \end{cases}$

1. Montrer que : $u_n > 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
2. On pose : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{5}$ puis exprimer v_n en fonction de n .
   - b. Montrer que : $u_n = \dfrac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis calculer la limite de la suite (u_n) .

Exercice : 11

Soit $(\mathcal{U}_n)$ la suite numérique définie par $\mathcal{U}_0 = 2$ et $\mathcal{U}_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathcal{U}_n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. a. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_n > 1$.
   - b. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{U}_{n+1} - \mathcal{U}_n = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}(\mathcal{U}_n - 1)$ et déduire que la suite $(\mathcal{U}_n)$ est décroissante et convergente.
2. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$, $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - 1$.
   - a. Montrer que $(\mathcal{V}_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son première terme.
   - b. Ecrire $\mathcal{U}_n$ en fonction de n puis déduire la limite de la suite $(\mathcal{U}_n)$.
   - c. Calculer la somme $S = \mathcal{U}_0 + \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 + \cdots\cdots + \mathcal{U}_{2021}$.

Exercice : 12

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par : $u_n = \dfrac{n + \sin(n)}{2n + \cos(n)}$ et $v_n = 3 + \dfrac{\sqrt{n}}{n + (-1)^n}$

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\dfrac{n-1}{2n+1} \leq u_n \leq \dfrac{n+1}{2n-1}$ et $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} \leq v_n - 3 \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$.
2. En déduire les limites de les suites (u_n) et (v_n).

Exercice : 13

1. On considère la fonction f définie sur $I = \left[0; \dfrac{1}{4}\right]$ par : $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{4}x$
   - a. Étudier la continuité de f sur I
   - b. Déterminer $f(I)$.
2. Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = \dfrac{1}{5}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $\boldsymbol{n}$ de $\mathbb{N}$.
   - a. Montrer que $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{4}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   - b. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
   - c. en déduire que (u_n) est convergente.
   - d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Yassine Elamri