2023/2024 — SteinMaths

Série d'exercices N : 03

Niveau : 2BACSPC-SVT — Lycée : ALMANSOUR DAHBI

Exercice : 1

Partie : I

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=2x^2+\sqrt{x}-2$

1. Calculer $g'(x)$ $(\forall x \in]0,+\infty[)$
2. Dresser le tableau de variations de g
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,1[$
4. En déduire le signe de $g(x)$ $(\forall x \in [0,+\infty[)$

Partie : II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}+x-2$ (C_f) sa courbe représentatif dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, puis interpréter le résultat obtenu
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$
3. Montrer que la droite $(D): y=x-2$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty[$
4. a. Montrer que : $(\forall x\in[0,+\infty[)\ f(x)-x+2=\dfrac{1-x}{x(1+\sqrt{x})}$
   b. En déduire que : $\begin{cases} f(x)\geq x-2 & si\ \ x\in]0,1] \\ f(x)\leq x-2 & si\ \ x\in]1,+\infty[\end{cases}$
5. a. Montrer que :$(\forall x\in]1,+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$
   b. En déduire que f est décroissante sur $]0,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha,+\infty$
   c. Dresser le tableau de variations de la fonction f
6. Soit h la restriction de la fonction f sur $[1,+\infty[$
   a. Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Dresser le tableau de variations de h^{-1}
7. Tracer les courbes (C_f) et $C_{h^{-1}}$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$
   On pose $\alpha\simeq 0.75$ et $f(\alpha)\simeq -1.07$

Exercice : 2

On considère la fonction f définie par : $f(x)=-1+\sqrt{1-x}$.

1. Déterminer D_f
2. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. Étudier la dérivabilité de f à gauche de 1 et interpréter le résultat graphiquement.
4. Étudier les variations de f.
5. Étudier les branches infinies de (C_f)
6. Calculer $f(0)$ et $f'(0)$ puis construire (C_f) dans un repère orthonormé.
7. a. Montrer que f possède une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminé.
   b. Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Yassine Elamri

c Tracer $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.

Exercice : 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x-1}$.

1. Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Étudier la dérivabilité de f à droite de 1 et interpréter le résultat obtenu.
3. Étudier les variations de f.
4. Étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.
5. Tracer (C_f).
6. Soit g la restriction de f sur $[2, +\infty[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque sur un intervalle J à déterminer.
   b. Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice : 4

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter le résultat géométriquement.
3. a. Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
4. a. Étudier la dérivabilité de f à droite en 2 et interpréter le résultat géométriquement.
   b. Étudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et interpréter le résultat géométriquement.
5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f \setminus \{-1, 2\}$.
   b. Montrer que : $(\forall x \in]2, +\infty[)\,;\ f'(x) < 0$ et $(\forall x \in]-\infty, -1[)\,;\ f'(x) > 0$.
   c. Dresser le tableau de variations de f.
6. a. Calculer $f''(x)$ pour tout $x \in D_f \setminus \{-1, 2\}$.
   b. Étudier la concavité de la courbe (C_f).
7. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $A(3, 2)$.
8. Montrer que l'équation $f(x) = -4$ admet une unique solution α dans D_f, et que $\alpha \in]-3, -2[$.
9. Soit g la restriction de f à l'intervalle $I = [2, +\infty[$.
   a. Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Tracer (C_f) et $(C_{g^{-1}})$ dans un repère orthonormé.

Exercice : 5

Soit f la fonction numérique définie $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 1}{x + 1}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
   b. Calculer $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique aux ré-

Yassine Elamri

sultats obtenus.

2 a Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}\,;\ f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

b Déduire que la droite $(\Delta) : y = ax+b$ est une asymptote oblique de (C_f), puis déterminer la position relative de (C_f) et (Δ).

3 Étudier les variations de f.

4 Soit I le point d'intersection des deux asymptotes de (C_f). Montrer que I est le centre de symétrie de (C_f).

5 Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de repère.

6 Donner l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

7 Tracer (C_f) et (T).

8 Déterminer graphiquement le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$, Calculer la valeur du paramètre réel m.

Exercice : 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2 a Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

b Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

c Donner le tableau de variations de f.

3 Écrire l'équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

4 Déterminer la droite (D) l'asymptote oblique à (C_f), puis étudier sa position relative par rapport à (C_f)

5 Étudier la concavité de la courbe (C_f) puis déterminer ses points d'inflexions.

6 a Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes de repère.

b Tracer (C_f) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

7 Discuter selon les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$.

Exercice : 7

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}$ et (C_f) sa courbe représentative dons le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1 a Déterminer D_f le domaine de définition de f.

b Montrer que f est une fonction paire.

2 Étudier la dérivabilité de f à droite en 1. Puis donner une interprétation géométrique au résultat.

3 a Montrer que f est dérivable sur $D_f\backslash\{-1;1\}$ et que $f'(x) = \dfrac{2-x^2}{x^3\sqrt{x^2-1}}$ pour tout x de $D_f\backslash\{-1;1\}$.

b Donner le tableau de variations de f.

4 Étudier la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$ puis tracer la courbe (C_f).

5 Soit g la restriction de f sur $[\sqrt{2};+\infty[$. C'est à dire que $g(x) = f(x)$ pour tout x de $[\sqrt{2};+\infty[$.

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

Yassine Elamri

b Montrer que : $(\forall x \in J)\,;\, g^{-1}(x) = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x^2}}$.

c Tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Exercice : 8

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = 2(3\sqrt[3]{x^2} - 2x); 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}; x > 1 \end{cases}$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2 a Montrer que $\lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{f(x)-2}{x-1} = 0$.

b Montrer que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 0$.

3 Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 puis interpréter graphiquement le résultat.

4 a Vérifier que :

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{4(1-\sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x}}; 0 \leq x \leq 1 \\ f'(x) = \dfrac{x-1}{2x\sqrt{x}}; x > 1 \end{cases}$$

b Donner le tableau de variations de f.

5 a Montrer que la courbe (C_f) admet deux points d'inflexions que l'on déterminera les coordonnées.

b Tracer la courbe (C_f).

6 a Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} de $[0;+\infty[$ vers un intervalle J à déterminer.

b Calculer $f\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)$ puis déduire que $(f^{-1})'(3-\sqrt{2}) = \dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$

Exercice : 9

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 Déterminer D_f, puis calculer les limites de f aux bornes de D_f.

2 Étudier la dérivabilité de la fonction f à gauche de 0 puis interpréter graphiquement ce résultat.

3 a Montrer que $f'(x) = \dfrac{2x-3}{2(x-1)}\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ pour tout x de $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$.

b Donner le tableau de variations de f.

4 Étudier les branches infinies de (C_f).

5 Tracer (C_f).

6 Soit g la restriction de f sur $I = \left]1;\dfrac{3}{2}\right[$.

a Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Tracer la courbe $(G_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Yassine Elamri

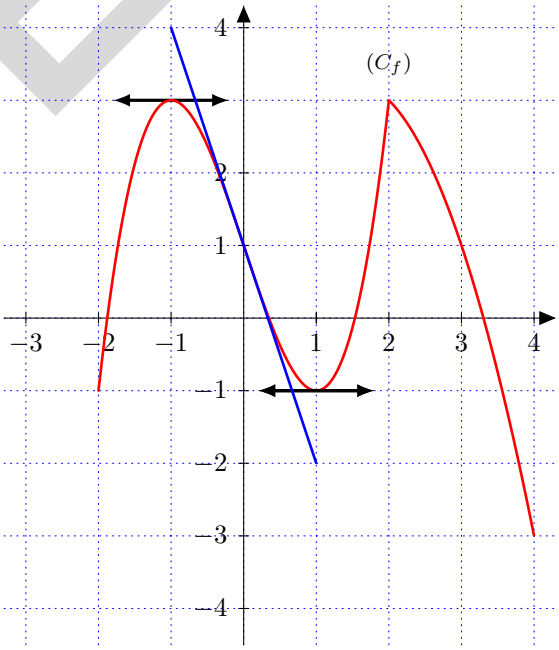
Exercice : 10

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x - 3$ et (C_f) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Étudier les branches infinies de (C_f).
3.
   a. Étudier la dérivabilité de f à droite de 1 et à gauche de -1 puis interpréter graphiquement ses résultats.
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout x de D_f.
   c. Donner le tableau de variation de f.
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique δ telle que $-2 < \delta < -\frac{3}{2}$.
5. Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I =]-\infty; -1[$.
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur un intervalle J à déterminer.
   b. Donner le tableau de variations de g^{-1}.
   c. Calculer $g^{-1}(0)$ et $(g^{-1})'(0)$ en fonction δ.
   d. Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout x de J et tracer $(C_{g^{-1}})$ dans le même repère.

Exercice : 11

(C_f) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.



1. Déterminer D_f
2.
   a. Déterminer $f'(1)$; $f'(-1)$ et $f'(0)$
   b. Vérifier que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion de (C_f)
   c. Étudier la convexité de (C_f)
   d. f est-elle dérivable en 2 ?
3. Dresser le tableau de variations de f
4. Soit g la restriction de la fonction f sur $[-1,1]$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b. Dresser le tableau de variations de g^{-1}
   c. Calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$
   d. Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$

Yassine Elamri