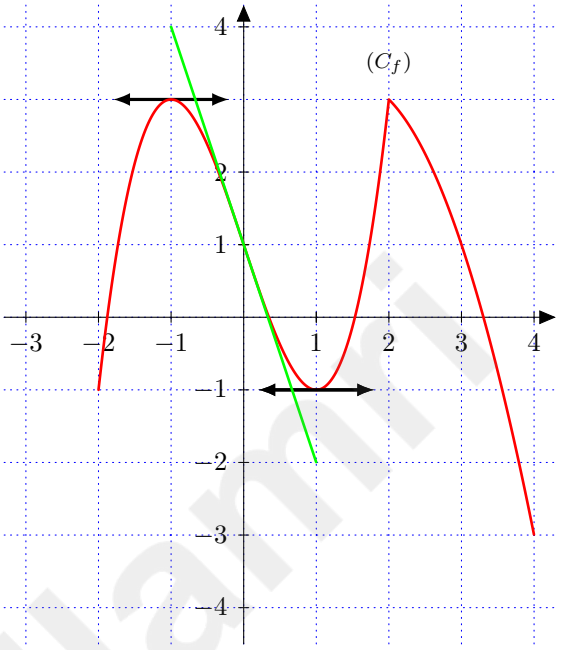
2023/2024 — SteinMaths

Série : 02
Dérivation

Niveau : 2BACSPC-SVT — Lycée : Elmansour Dahbi

Exercice : 1

(C_f) désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.



1. Déterminer D_f
2. a. Déterminer $f'(1)$; $f'(-1)$ et $f'(0)$
   b. Vérifier que le point $A(0,1)$ est un point d'inflexion de (C_f)
   c. Étudier la convexité de (C_f)
   d. f est-elle dérivable en 2 ?
3. Dresser le tableau de variations de f
4. Soit g la restriction de la fonction f sur $[-1,1]$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer
   b. Dresser le tableau de variations de g^{-1}
   c. Calculer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

Exercice : 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{3-2x}$

1. Déterminer D_f
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$
3. Étudier la continuité de f à gauche de $a = \dfrac{3}{2}$
4. Étudier la dérivabilité de f à gauche de $a = \dfrac{3}{2}$, et interprétai le résultat géométriquement
5. a. Montrer que : $(\forall x \in D_f \backslash \{\frac{3}{2}\}) : f'(x) = \dfrac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$
   b. Dresser le tableau de variation de f sur D_f.
6. Montrer que l'équation $x\sqrt{3-2x} = -1$ admet au moins une solution dans $]-1;1[$
7. Soit g la fonction définie sur $I =]-\infty;1]$
   a. Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un J qu'il faut déterminer.
   b. Étudier la dérivabilité de g^{-1} sur J
   c. Calculer $g(0)$ puis déterminer $(g^{-1})'(0)$

Exercice : 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x^3 + x + 1$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$
3. Montrer que $-1 < \alpha < 0$
4. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
5. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur $\mathbb{R}$.

Yassine Elamri
http://www.steinmaths.com

6 Calculer $(f^{-1})'(0)$ en fonction de α.

Exercice : 4

En utilisant la dérivée calculer les limites suivantes :

1 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x\sqrt{x+1}-6}{x-3}$

2 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{2\sin(x)-\sqrt{3}}{x-\frac{\pi}{3}}$

3 $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{x\sin(x)}{x-\pi}$

4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$

5 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

6 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(\pi x)}{x-1}$

Exercice : 5

Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1 $f(x) = x\sqrt[7]{x^3-4x+1}$

2 $f(x) = (x\sqrt{x}+1)^{2016}$

3 $f(x) = \sqrt{\dfrac{3x-1}{x+3}}$

4 $f(x) = \sin(x)\cos^3(2x^2+1)$

Exercice : 6

soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2+x;;;si.x \geq 1 \\ f(x) = \dfrac{2}{2-x};;;si.x < 1 \end{cases}$

1 Déterminer D_f.

2 Étudier la continuité de f en $a = 1$.

3 Étudier la dérivabilité de f en $a = 2$.

4 Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $a = 1$.

5 f est-elle dérivable en $a = 1$

Exercice : 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

1 Vérifier que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\ f(x) = \left(\sqrt{x}-1\right)^2$

2 Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3 Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$

4 Étudier la dérivabilité de f à droite de 0 , puis interpréter le résultat obtenu

a Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)\ f'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$

Yassine Elamri
http://www.steinmaths.com

b Étudier les variations de f sur D_f, puis donner le tableau de variations de f

c Déterminer une équation cartésienne de la droite tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse 4

5 Soit g la restriction de fonction g sur l'intervalle $[1, +\infty[$

a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1}

c Montrer que la fonction g^{-1}est dérivable en 1, puis déterminer $\left(g^{-1}\right)'(1)$

d Calculer $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+g^{-1}(x)-5}{x-1}$

e Calculer $g^{-1}(x)$ $(\forall x \in J)$

Exercice : 8

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = x + 2\sqrt{x} - 1$

1 Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

2 a Étudier la dérivabilité de g à droite de 0, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

b Calculer $g'(x)$ pour tout $x > 0$

c Étudier les variation de g, puis dresser le tableau de variations de g

3 a Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α da,s $[0, 1]$

b Donner un encadrement de α d'amplitude 0.25

c Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$

Partie I :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}+1} - 1$

1 a Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}} - 1$

b Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 a Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu

b Montrer que $(\forall x \in]0, +\infty[)\,;\, f'(x) = \dfrac{g(x)}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}$

c Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$

d Donner une équation cartésienne de la droite tangente de la courbe représentative de f au point d'abscisse 1

3 Soit h la restriction de f sur l'intervalle $[\alpha, +\infty[$

a Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer

b Dresser le tableau de variations de h^{-1} sur J

c Montrer que h^{-1} est dérivable en 0, puis calculer $\left(h^{-1}\right)'(0)$

d Donner une équation cartésienne de la droite tangente de la courbe représentative de h^{-1} au point d'abscisse 0

Yassine Elamri

http://www.steinmaths.com