ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : RATTRAPAGE 2023

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2 pts)

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt **1 -** Vérifions que $w_n = 1 - \dfrac{2}{2^n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On a,pour tout n de $\mathbb{N}$: $w_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1} = \dfrac{2^n+1-2}{2^n+1} = \dfrac{2^n+1}{2^n+1} - \dfrac{2}{2^n+1} = 1 - \dfrac{2}{2^n+1}$

Donc $w_n = 1 - \dfrac{2}{2^n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0.5 pt **2 -** Montrons que $w_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $w_n - 1 = 1 - \dfrac{2}{2^n+1} - 1 = -\dfrac{2}{2^n+1} < 0$ Car $(2^n+1 > 0,\ \forall n \in \mathbb{N})$

Donc on a $w_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **3 -** Montrons que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

D'aprés la question 1, on a $w_n = 1 - \dfrac{2}{2^n+1}$

Donc $w_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{2^{n+1}+1}$

Calculons $w_{n+1} - w_n$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \left(1 - \frac{2}{2^{n+1}+1}\right) - \left(1 - \frac{2}{2^n+1}\right) = -\frac{2}{2^{n+1}+1} + \frac{2}{2^n+1} \\ &= \frac{-2(2^n+1)+2(2^{n+1}+1)}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)} = \frac{-2^{n+1}-2+2^{n+2}+2}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)} \\ &= \frac{2^{n+1}(2-1)}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)} = \frac{2^{n+1}}{(2^{n+1}+1)(2^n+1)} > 0 \end{aligned}$$

Donc $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

0.5 pt **4 -** La convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Comme la suite (u_n) est croissante et aussi majorée par 1 $((\forall n \in \mathbb{N}); w_n < 1)$

Alors la suite (u_n) est convergente.

Exercice 2 : (3 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n - \frac{5}{7}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt **1 -** Calculons u_1.

$$u_1 = \frac{5}{7}u_0 - \frac{5}{7} = \frac{5}{7}\times\frac{1}{2} - \frac{5}{7} = -\frac{5}{14}$$

2 - On pose $v_n = u_n + \frac{5}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.25 pt **a)** Calculons v_0 .

$$v_0 = u_0 + \frac{5}{2} = \tfrac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$$

1 pt **b)** Montrons que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{5}{7}$.

$(\forall n \in \mathbb{N})$ on a : $v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{5}{2} = \frac{5}{7}u_n - \frac{5}{7} + \frac{5}{2} = \frac{5}{7}u_n + \frac{25}{14} = \frac{5}{7}\left(u_n + \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{7}v_n$

Donc ; $v_{n+1} = \frac{5}{7}v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{7}$

0.5 pt **c)** En déduisons v_n en fonction de n.

On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{5}{7}$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = v_0 \times q^{n-0} = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n$ car $v_0 = 3$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})$ $v_n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n$

0.5 pt **3 - a)** Vérifions que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n - \frac{5}{2}$.

On sait que : $v_n = u_n + \frac{5}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

D'où $u_n = v_n - \frac{5}{2}$ et comme $v_n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n$

Donc : $u_n = 3\left(\frac{5}{7}\right)^n - \frac{5}{2}$

0.5 pt **b)** Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 3\left(\frac{5}{7}\right)^n - \frac{5}{2} = -\frac{5}{2}$$

Car $-1 < \frac{5}{7} < 1$ c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\frac{5}{2}$

Yassine Elamri

Exercice 3 : (1 pts)

$(\Omega; p)$ est un espace probabilsé fini et X la variable aléatoire doit la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

x_i	0	1	3	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

0.5 pt **1 -** Complétons le tableau ci-dessus

On sait que :$P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 4) = 1$

Donc : $P(X = 1) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 3) + P(X = 4)) = 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)$

Alors : $\boxed{P(X = 1) = \frac{1}{4}}$

0.5 pt **2 -** Calculons $E(X)$.

$E(X) = 0\times P(X = 0)+1\times P(X = 1)+3\times P(X = 3)+4\times P(X = 4) = 1\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

Alors : $\boxed{E(X) = \frac{7}{4}}$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient quatre boules rouges et trois boules vertes.(Toutes les boules sont indiscernables au toucher).

On considère l'expérience suivante :"On tire au hasard et simultanément et au hasard trois boules"

Soit l'événement A:"Les trois boules tirées sont de même couleur ".

Et l'événement B:" Tirer au moins une boule verte".

1.5 pt **1 -** Vérifions que $p(A) = \frac{1}{7}$ et calculons $p(B)$

On considère l'univers Ω, Le tirage est simultané donc $card(\Omega) = C_7^3 = 35$

Les boules sont indiscernables au toucher signifie que $P(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$ et $P(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)}$

$A : (R, R, R)$ où (V, V, V) d'où $card(A) = C_4^3 + C_3^3 = 5$ $\boxed{\text{Donc : } P(A) = \frac{1}{7}}$

$B : (V, R, R)$ où (V, V, R) où (V, V, V)

D'où $card(B) = C_3^1 \times C_4^2 + C_3^2 \times C_4^1 + C_3^3 = 31$

$\boxed{\text{Donc : } P(B) = \frac{31}{35}}$

1.5 pt **2 -** On répète l'expérience citée ci-dessus 4 fois de suite dans les même conditions.

La probabilité pour que l'événement A se réalise exactement 3 fois est : $C_4^3\times\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(1-\frac{1}{7}\right) = \boxed{\frac{24}{7^4}}$

Yassine Elamri

Exercice 5 : (9 pts)

Soit g la fonction numérique de réelle x définie par : $g(x) = \frac{-2+lnx}{-1+lnx}$.

Soit $(\mathcal{C}_g)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 pt **1 -** Vérifions que le domaine de définition de la fonction g est $D_g =]0;e[\cup]e;+\infty[$

$D_g = \{x \in \mathbb{R}/x > 0; -1 + lnx \neq 0\}$

$-1 + lnx \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad lnx \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq e$

Donc $D_g = \{x \in \mathbb{R}/x > 0; x \neq e\} = \boxed{]0;e[\cup]e;+\infty[}$

1 pt **2 - a)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = 1$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-2+lnx}{-1+lnx} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{lnx(\frac{-2}{lnx}+1)}{lnx(\frac{-1}{lnx}+1)} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\frac{-2}{lnx}+1}{\frac{-1}{lnx}+1} = \boxed{1}$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-2}{lnx} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{-1}{lnx} = 0$

1.5 pt **b)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ et donnons l'interprétation géométriquement du résultat.

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2+lnx}{-1+lnx} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx(\frac{-2}{lnx}+1)}{lnx(\frac{-1}{lnx}+1)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{lnx}+1}{\frac{-1}{lnx}+1} = \boxed{1}$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2}{lnx} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{lnx} = 0$

1 pt **c)** Montrons que $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} g(x) = +\infty$ et calculons $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} g(x)$

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} \frac{-2+lnx}{-1+lnx} = \boxed{+\infty}$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} -2 + lnx = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} -1 + lnx = 0^-$

$\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} \frac{-2+lnx}{-1+lnx} = \boxed{-\infty}$

Car $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} -2 + lnx = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} -1 + lnx = 0^+$

0.5 pt **d)** Donnons une interprétation géométrique des deux résultats précedents.

On a $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x<e}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ x>e}} g(x) = -\infty$

Donc, $\boxed{(C_f) \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = e}$

1 pt **3 - a)** Montrons que $g'(x) = \frac{1}{x(\ln x - 1)^2}$ pour tout x de D_g

On a g dérivable sur D_g :

$g'(x) = \left(\frac{-2+lnx}{-1+lnx}\right)' = \frac{(-2+lnx)'(-1+lnx)-(-2+lnx)(-1+lnx)'}{(-1+lnx)^2}$

$= \frac{\frac{1}{x}(-1+lnx)-(-2+lnx)\frac{1}{x}}{(-1+lnx)^2} = \frac{(-1+lnx)-(-2+lnx)}{x(\ln x-1)^2} = \boxed{\frac{1}{x(\ln x-1)^2}}$

1 pt **b)** Montrons que g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0;e[$ et $]e;+\infty[$

On a $g'(x) = \frac{1}{x(\ln x-1)^2}$

Or $x > 0$ et $(\ln x - 1)^2$ pour tout x de D_g

Yassine Elamri

Donc $g'(x) > 0$ pour tout x de $D_g =]0; e[\cup]e; +\infty[$

Alors g est strictement croissante sur chacun des intervalles $]0; e[$ et $]e; +\infty[$

1 pt **c)** Calculons $g(e^2)$ puis dressons le tableau de variations de g

$g(e^2) = \frac{-2+ln(e^2)}{-1+ln(e^2)} = 0$

x	0		e		e^2	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	‖	$+$	$+$	
$g(x)$	‖	$1 \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow 1$		

d) A l'aide du tableau de variations de g donnons l'ensemble des solutions de l'inéquation :

1 pt $g(x) \geqslant 0$

D'aprés le tableau de variations de g, on remarque que (C_g) est au dessus de l'axe des abscisses sur $]0; e[$ et $]e^2; +\infty[$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation : $g(x) \geqslant 0$ est $S =]0; e[\cup]e^2; +\infty[$

Exercice 6 : (2 pts)

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x} - 1$.
Soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$et (Δ) la droite d'équation $y = -x + 2$ et A le point d'abscisse a $(a > 0)$, intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ) (Voir figure ci-dessous)

0.5 pt **1 -** Vérifions que $e^{-a} = 3 - a$

On a $f(a) = e^{-a} - 1$ et a l'abscisse du point d'intersection de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite d'équation $y = -x + 2$ donc :

$f(a) = -a + 2$ càd $e^{-a} - 1 = -a + 2$, donc $e^{-a} = 3 - a$

1 pt **2 -** Montrons que $\int_0^a (e^{-x} - 1)\mathrm{d}x = -2$

$\int_0^a (e^{-x} - 1)\mathrm{d}x = [(-e^{-x} - x)]_0^a = (-e^{-a} - a) - (-e^0 - 0) = -e^{-a} - a + 1 = -2$

Car $-e^{-a} - a = -3$ (D'aprés la question précedent)

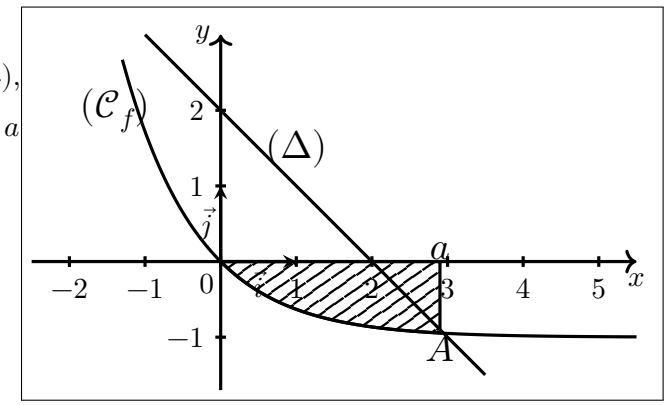
0.5 pt **3 -** En déduisons l'aire de la partie hachurée.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine plan limité par (C_f), l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = a$

On sait que $\mathcal{A} = \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x u.a$

Comme f est négatif sur $[0, a]$

Donc $\forall x \in [0, a]$ on a $|f(x)| = -f(x)$



D'où : $\mathcal{A} = \int_0^a -f(x)\mathrm{d}x u.a = -\int_0^a (e^{-x} - 1)\mathrm{d}x u.a = 2u.a$ et Alors $\mathcal{A} = 2.u.a$

Yassine Elamri

Today better tha https://steinmath.com row better than today