ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences économique et gestion

Session : NORMAL 2023

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2 pts)

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $w_0 = 1$ et $w_{n+1} = \frac{2}{7}w_n + 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$

1 pt **1 -** Montrons par récurrence que $w_n < \frac{7}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$: $w_0 = 1$, donc $w_0 < \frac{7}{5}$.

Supposons que $w_n < \frac{7}{5}$.

Montrons que $w_{n+1} < \frac{7}{5}$.

On a

$$\begin{aligned} w_n < \frac{7}{5} &\Rightarrow \frac{2}{7}w_n < \frac{2}{7}\times\frac{7}{5} \\ &\Rightarrow \frac{2}{7}w_n < \frac{2}{5} \\ &\Rightarrow \frac{2}{7}w_n + 1 < \frac{2}{5} + 1 \\ &\Rightarrow w_{n+1} < \frac{7}{5} \end{aligned}$$

D'après le principe de démonstration par récurrence : $(\forall n \in \mathbb{N}) : w_n < \frac{7}{5}$.

0,5 pt **2 - a)** Montrons que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \frac{2}{7}w_n + 1 - w_n \\ &= \frac{2w_n + 7 - 7w_n}{7} \\ &= \frac{7 - 5w_n}{7} \end{aligned}$$

On a $w_n < \frac{7}{5} \Rightarrow -5w_n > -7$

$\Rightarrow 7 - 5w_n > 0$

Donc $w_{n+1} - w_n < 0$, d'on $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

0,5 pt **b)** La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Justifions notre réponse.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{7}{5}$,

T than yesterday, tomorrow better than today

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2 : (3 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{3+7u_n}{7+3u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Calculons u_1 et u_2.

$u_1 = \frac{3+7u_0}{7+3u_0} = \frac{3+7\times 0}{7+3\times 0} = \frac{3}{7}$.

$u_2 = \frac{3+7u_1}{7+3u_1} = \frac{3+7\times\frac{3}{7}}{7+3\times\frac{3}{7}} = \frac{21}{29}$

Donc $u_1 = \frac{3}{7}$ et $u_2 = \frac{21}{29}$

2 - On pose $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,25 pt **a)** Calculons v_0.

$v_0 = \frac{1-u_0}{1+u_0} = \frac{1-0}{1+0} = 1$

Donc $v_0 = 1$

1 pt **b)** Montrons que $(v_n)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

$$v_{n+1} = \frac{1-u_{n+1}}{1+u_{n+1}} = \frac{1-\frac{3+7u_n}{7+3u_n}}{1+\frac{3+7u_n}{7+3u_n}} = \frac{7+3u_n-3-7u_n}{7+3u_n+3+7u_n}$$

$$= \frac{4-4u_n}{10+10u_n} = \frac{4(1-u_n)}{10(1+u_n)} = \frac{2}{5}\left(\frac{1-u_n}{1+u_n}\right)$$

Donc $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$.

Alors $(v_n)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$.

0,25 pt **c)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$.

On a $(v_n)_m$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{5}$ et $v_0 = 1$

Donc $v_n = v_0 \cdot q^n = \left(\frac{e}{5}\right)^n$.

D'où $v_n = (\frac{2}{5})^n$.

0,5 pt **3 - a)** Vérifions que $u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n} \Rightarrow (1+u_n)v_n = 1-u_n$$

$$\Rightarrow v_n + u_n v_n = 1-u_n$$

$$\Rightarrow u_n v_n + u_n = 1-v_n$$

$$\Rightarrow u_n(1+v_n) = 1-v_n$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n}$$

Donc $u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n}$

0,25 pt **b)** En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$u_n = \frac{1-v_n}{1+v_n} = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^2}$.

Donc $u_n = \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

Yassine Elamri

0,25 pt

c) Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

On a $-1 < \frac{2}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$

Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{5}\right)^n} = 1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Exercice 3 : (1 pts)

$(\Omega; p)$ est un espace probabilisé fini. On rappelle que si A et B sont deux événements de Ω alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Soit A et B deux événements indépendants tels que : $p(A) = \frac{1}{2}$ et $p(A \cup B) = \frac{5}{8}$

1 pt

Calculons $p(B)$.

On a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ et on a A et B sont indépendante.

Donc $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A) \times p(B)$

Donc $p(B) - p(A) \times p(B) = p(A \cap B) - p(A)$.

Alors $p(B)(1 - p(A)) = p(A \cap B) - p(A)$.

Donc $p(B) = \frac{p(A\cap B)-p(A)}{1-p(A)}$

$p(B) = \frac{\frac{5}{8}-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$.

Donc $p(B) = \frac{1}{4}$

Exercice 4 : (3 pts)

Une urne contient cent jetons indiscernables au toucher de couleur soit blanche soit noire et portant soit le chiffre 1 soit le chiffre 2.

La répartition de ces jetons est donnée par le tableau suivant :

Chiffre porté par le jeton \ Couleur	Blanche	Noire	Total
1	50	16	66
2	14	20	34
Total	64	36	100

On tire au hasard un jeton de l'urne.

1 - Calculons les probabilités suivantes :

0.5 pt

a) La probabilité p_1 pour que le jeton soit de couleur blanche.

On a 100 jeton dont 64 sont blancs.

Alors $p_1 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25}$.

Donc $p_1 = \frac{16}{25}$

0.5 pt

b) La probabilité p_2 pour que le jeton porte le chiffre 2

On a 100 jetons dont 34 portent le Chiffre 2

Alors $p_2 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$

Yassine Elamri

Donc $p_2 = \frac{17}{50}$

0.5 pt **c)** La probabilité p_3 pour que le jeton porte le chiffre 2 et soit de couleur blanche.

On a 100 jetons, dont 14 sont de couleur blanche et portent le chiffre 2.

Alors $p_3 = \frac{14}{100} = \frac{7}{50}$

Donc $p_3 = \frac{7}{50}$

0.5 pt **2 -** La probabilité p_4 pour que le jeton tiré porte le chiffre 2 sachant qu'il est de couleur blanche.

On a 64 jetons blancs, dont 14 porte le chiffre 2

Alors $p_4 = \frac{14}{64} = \frac{7}{32}$

Donc $p_4 = \frac{7}{32}$

3 - On considère la variable aléatoire X qui est égale au chiffre porté par le jeton.

0.5 pt **a)** Copions et complétons le tableau suivant :

- On a 100 jetons dont 66 portant Chiffre 1, donc $p(x=1) = \frac{66}{100} = \frac{33}{50}$
- On a 100 jetons dont 34 portent le chiffre 2, donc $p(x=2) = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$.

x_i	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{33}{50}$	$\frac{17}{50}$

0.5 pt **b)** Calculons $E(X)$ l'espérance mathématique de X

$E(x) = p(x=1) \times 1 + p(x=2) \times 2$

$E(x) = \dfrac{33}{50} \times 1 + \dfrac{17}{50} \times 2$

$E(x) = \dfrac{67}{50}$

Donc $E(x) = \frac{67}{50}$

Exercice 5 : (2.5 pts)

1.5 pt **1 -** Calculons les limites suivantes : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x} - \ln x\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x} + \ln x\right)$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln(x) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x} - \ln(x)\right) = +\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = 0$.

Donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(\frac{1}{x} + \ln(x)\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1+x\ln(x)}{x} = +\infty$

1 pt **2 -** On rappelle que si f est une fonction dérivable en x_0 alors $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$.

Calculons $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ et $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} \times \ln x\right)$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1}$$

$$= (\ln)'(1) = 1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} \times \ln(x) = \lim_{x\to 1} x \times \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \times 1 = 1$$

D'où $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} \times \ln x\right) = 1$

Yassine Elamri

Exercice 6 : (8.5 pts)

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 1 - \frac{x}{e^x}$$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1 pt **1 - a)** Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et donnons une interprétation géométrique du résultat.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = 1$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Donc (C_f) admet un asymptote horizontal d'équation $y = 1$.

1.5 pt **b)** Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donnons une interprétation géométrique du résultat.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2 - xe^{-x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} = +\infty$

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$.

Alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-\frac{x}{e^x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} - e^{-x} = -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

On déduit que (C_f) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $-\infty$.

0.5 pt **2 - a)** Montons que $f'(x) = \frac{x-1}{e^x}$

$f'(x) = \left(1 - \frac{x}{e^x}\right)' = -\frac{x'e^x - x(e^x)'}{(e^x)^2} = -\frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = -\frac{e^x(1-x)}{(e^x)^2} = \frac{x-1}{e^x}$

Donc $f'(x) = \frac{x-1}{e^x}$

1 pt **b)** Étudions le signe de $f'(x)$ et dressons le tableau de variations de f

On a pour tous $x \in \mathbb{R} : e^x > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ est celle de $x - 1$.

Alors $f'(x) = 0 \iff x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-∞	↘	$1-\frac{1}{e}$	↗	1

Yassine Elamri

1 pt

c) Donnons l'équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0

(T) : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

On a $f'(0) = 1$ et $f(0) = 1$

$= 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{2}$

Donc $\int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-2}{e}$

https://steinmaths.com day better than yesterday, tomorrow better than today

1 pt

b) En déduire l'aire de la partie hachurée.

Sur l'intervalle $[0,1]$, la droite (Δ) est située au dessus de la courbe (C_f). donc l'aire demandée est : $A = \left(\int_0^1 (1-f(x))dx\right) u \cdot a$

On a : $\int_0^1 (1-f(x))dx = \int_0^1 \left(1-1+\frac{x}{e^x}\right)dx = \int_0^1 xe^{-x}dx = \frac{e-1}{2}$

Donc $A = \frac{e-1}{2}\text{Cm}^2$

FIN

Yassine Elamri