ROYAUME DU MAROC

# Correction

## Baccalauréat Sciences Économiques

## Session : RATTRAPAGE 2022

## MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

### Exercice 1 : (2 pts)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n+1} \end{cases}$ pour tout $n$ de $\mathbb{N}$

0.5 pt **1 -** **Calculer $u_1$ et $u_2$**

On a :

$$\begin{aligned} u_0 = u_{0+1} &= \frac{3u_0}{2u_0+1} \\ &= \frac{3\times\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{2}+1} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{u_1 = \frac{3}{4}}$

Et on a :

$$\begin{aligned} u_2 = u_{1+1} &= \frac{3u_1}{2u_1+1} \\ &= \frac{3\times\frac{3}{4}}{2\times\frac{3}{4}+1} \\ &= \frac{9}{10} \end{aligned}$$

Donc : $\boxed{u_2 = \frac{9}{10}}$

0.5 pt **2 -** a) **Montrer par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_n > 0$**

- Pour $n = 0$ on a $u_0 > 0$ **(Donc la proposition est vraie pour $n = 0$).**
- On suppose que : $u_n > 0$.
- Et on montre que : $u_{n+1} > 0$.

On a : $u_n > 0$ donc : $3u_n > 0$.

Et On a :$2u_n > 0$ Donc : $2u_n + 1 > 0 + 1$

D'où $\frac{3u_n}{2u_n+1} > 0$

Donc : le principe de récurrence implique que $u_n > 0$

**0.5 pt** b) **Montrer par récurrence que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_n < 1$**

- Pour $n = 0$ on a $u_0 < 1$ **(Donc la proposition est vraie pour $n = 0$)**
- On suppose que $u_n < 1$.
- Et on montre que : $u_{n+1} < 1$.

Revient à montrer que : $u_{n+1} - 1 < 0$.
On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 1 &= \frac{3u_n}{2u_n + 1} - 1 \\ &= \frac{3u_n - 1(2u_n + 1)}{2u_n + 1} \\ &= \frac{3u_n - 2u_n - 1}{2u_n + 1} \\ &= \frac{u_n - 1}{2u_n + 1} > 0 \end{aligned}$$

En Effet : $\left\{ \begin{array}{c} u_n > 0 \implies 2u_n + 1 > 0 + 1 > 0 \\ u_n - 1 < 0 \text{ (D'après l'hypothèse de récurrence)} \end{array} \right\}$

Finalement : $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n < 1$

**0.5 pt** **3 -** a) **Vérifier que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{2u_n + 1} - u_n \\ &= \frac{3u_n - u_n(2u_n + 1)}{2u_n + 1} \\ &= \frac{3u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} \\ &= \frac{2u_n - 2u_n^2}{2u_n + 1} \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n(1 - u_n)}{2u_n + 1} \end{aligned}$$

Finalement : $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1}$

**0.25 pt** b) **En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.**

**Si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ Alors $u_n$ est décroissante**

**Si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ Alors $u_n$ est croissante**

On a : $u_n < 1$ donc : $1 - u_n > 0$.

Yassine Elamri

Et on a : $u_n > 0$ donc : $2u_n + 1 > 0$.

Donc $\frac{2u_n(1-u_n)}{2u_n+1} > 0$
D' où : $u_{n+1} - u_n > 0$ alors $u_n$ est croissante.

Finalement : $u_n$ est croissante.

0.25 pt c) **Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.**

Puisque $u_n$ est croissante et majorée par 1 donc elle est convergente.

Finalement : La suite $u_n$ est convergente.

**4 -** On pose pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$

0.25 pt a) **Calculer $v_0$**
On a : $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$.
Donc :

$$\begin{aligned} v_0 &= \frac{1}{u_0} - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 \\ &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

D'où : $v_0 = 1$

0.5 pt b) **Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$**
Revient à montrer que : $v_{n+1} = (\frac{1}{3}) \times v_n$.
On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{1}{u_{n+1}} - 1 \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n}{2u_n+1}} - 1 \\ &= \frac{2u_n+1}{3u_n} - 1 \\ &= \frac{2u_n+1-3u_n}{3u_n} \\ &= \frac{1-u_n}{3u_n} \\ &= \frac{1}{3u_n} - \frac{u_n}{3u_n} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \\ v_{n+1} &= \frac{1}{3} \times v_n \end{aligned}$$

Donc : $v_n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

0.5 pt c) **Exprimer $v_n$ en fonction de $n$**
Puisque $(u_n)$ est une suite géométrique alors : $(\forall (n;m) \in \mathbb{R}^2)$; $\quad v_n = v_m \times q^{n-m}$.

Yassine Elamri

Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $m = 0$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0.25 pt **5 -** a) **Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_n = \frac{1}{v_n+1}$**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{u_n} - 1 \\ \frac{1}{u_n} &= v_n + 1 \\ u_n &= \frac{1}{v_n + 1} \end{aligned}$$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); \quad u_n = \frac{1}{v_n+1}$

0.25 pt b) **Déduire de ce qui précède que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ : $u_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$**

Soit $n \in \mathbb{N}$ On a :

$$u_n = \frac{1}{v_n + 1} \quad \text{et} \quad v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

**donc :** $u_n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+1}$

0.25 pt c) **Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$**

On a : $-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

D'où : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

**s)**

ique $g$ de la variable réelle $x$ définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x$$

$\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

finie sur $]0;+\infty[$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \quad ^2)' + \quad (2\ln x)' \\ &= \quad - 2 \times \frac{1}{x} \\ &= \frac{2x^2 - \quad}{x} \\ g'(x) &= 2\left(\frac{x^2-1}{x}\right) \end{aligned}$$

D'où : $\forall x \in ]0;+\infty[; \quad g'(x) = 2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$

https://s
e Elamri

**1.00 pt** **2 - En déduire que $g$ est strictement décroissante sur $]0;1]$ et que $g$ est strictement croissante sur $[1;+\infty[$**

On a $\forall x \in ]0;+\infty[; \quad g'(x) = 2\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$.

- Puisque $x \in ]0;+\infty[$ alors : $x > 0$.
- Donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 - 1$.

On a :

$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x-1)(x+1) = 0$$

alors on a deux solutions $-1$ et $1$.

Donc :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-1$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Alors : $g$ est strictement décroissante sur $]0;1]$ et strictement croissante sur$[1;+\infty[$

**0.25 pt** **3 -** a) **Calculer $g(1)$.**

$$g(1) = 1^2 + 2 - 2\ln(1)$$
$$= 3$$

**0.25 pt** b) **Dresser le tableau de variations de $g$** (Le calcul des limites aux bornes n'est pas demandé).

Le tableau de variations de $g$ est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | ‖ | ↘ | $3$ | ↗ | |

**0.5 pt** c) **En déduire que $g(x) \geq 3$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$.**

D'après le tableau de variation on a : g(1) est la valeur minimale de ( $C_g$) alors : $g(x) > g(1) = 3$.

donc : $(\forall x \in ]0;+\infty[); \quad g(x) \geq 3$

**Partie II**

On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{2\ln x}{x}$$

et soit $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

**1.00 pt** **1 - Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ et donner une interprétation géométrique du résultat.**

Yassine Elamri

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} x+1+\frac{2\ln x}{x}\\ &= \lim_{x\to 0^+} x+1+\frac{2}{x}\times(\ln x)\end{aligned}$$

$$= \frac{x^2+2-2\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{g}(x)}{x^2}$$



https://steinmath.com day better than yesterday, tomorrow better than today

D'où : $\boxed{\forall x \in ]0;+\infty[; \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}}$

**0.5 pt** b) **Déduire que $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.**
Soit $x \in ]0;+\infty[$.
Pour déterminer le signe de $f'(x)$ il suffit de déterminer le signe de $g(x)$ car $x^2 > 0$ et d'après la question **3-c)** de la **Partie I** on a $g(x) \geq 3 > 0$ alors $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

**0.5 pt** c) **Dresser le tableau de variations de $f$.**
Le tableau de variation est le suivant :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ | $+$ | |
| $f$ | | ↗ | $+\infty$ |
| | $-\infty$ | | |

**1.00 pt** **4 -** a) **Montrer que $f''(x) = \frac{2}{x^3}(-3+2\ln x)$ pour tout $x$ de $]0;+\infty[$.**
Soit $x \in 0;+\infty[$

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(1+2\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)\right)' \\
&= 1' + 2\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)' \\
&= 2\left(\frac{(1-\ln x)'\,(x^2) - (1-\ln x)\,(x^2)'}{(x^2)^2}\right) \\
&= 2\left(\frac{-\frac{1}{x}(x^2) - (1-\ln x)(2x)}{x^4}\right) \\
&= 2\left(\frac{-x-(1-\ln x)(2x)}{x^4}\right) \\
&= 2\left(x\left(\frac{-1-(1-\ln x)(2)}{x^4}\right)\right) \\
&= 2\left(\left(\frac{-1-2+2\ln x}{x^3}\right)\right) \\
f''(x) &= \frac{2}{x^3}(-3+2\ln x)
\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\forall x \in ]0;+\infty[); \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}(-3+2\ln x)}$

**1.00 pt** b) **En déduire que la courbe $(C_f)$ admet un point d'inflexion d'abscisse $e\sqrt{e}$.**
On a :

$$\begin{aligned}
f''(x) = 0 &\iff -3+2\ln x = 0 \\
&\iff 2\ln x = 3 \\
&\iff \ln x = \frac{3}{2} \\
&\iff x = e^{\frac{3}{2}} \\
&\iff x = \sqrt{e^3} \\
&\iff x = \sqrt{e^2 e} \\
&\iff x = e\sqrt{e}
\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\text{la courbe } (C_f) \text{ admet un point d'inflexion d'abscisse } e\sqrt{e}}$

**5 -** Dans la figure ci-dessous $(C_f)$ est la courbe représentative de $f$ et $(\Delta)$ la droite d'équation $y = x+1$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Yassine Elamri

**1.00 pt**

a) **Montrer que** $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$.

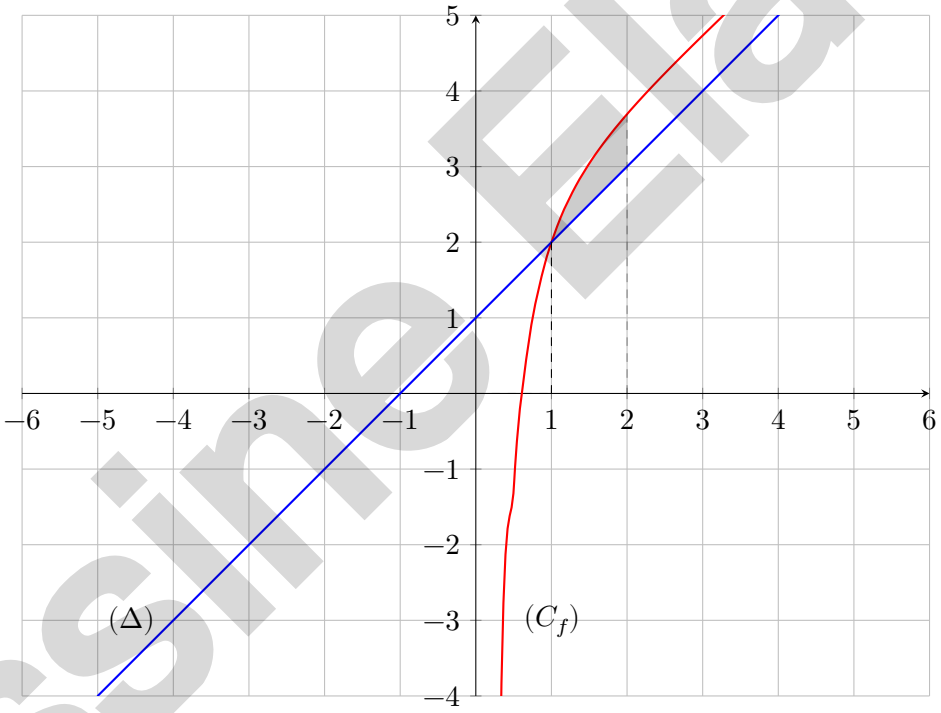
**Rappel :** $f = u'(x) \times u(x)^n \Longrightarrow F = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}$

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx &= \int_1^2 \frac{1}{x} \times \ln x dx \\ &= \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 \\ &= \frac{(\ln 1)^2}{2} - \frac{(\ln 2)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2)^2\end{aligned}$$

Donc : $\boxed{\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln 2)^2.}$

**0.75 pt**

b) **En déduire l'aire de la partie hachurée.**




On a :

$$\begin{aligned}\int_1^2 |\, f(x) - (x+1)\,| \, dx &= \int_1^2 \underbrace{f(x) - (x+1)}_{\text{Positif}} dx \\ &= \int_1^2 x + 1 + \frac{2\ln x}{x} - (x+1) \\ &= \int_1^2 \frac{2\ln x}{x} dx \\ &= 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \\ &= 2 \times \frac{1}{2}(\ln 2)^2 \quad \text{d'après la question précédente} \\ &= (\ln 2)^2 \text{ u.a}\end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\text{L'aire de La partie hachurée est : } (\ln 2)^2 \text{ u.a}}$

Yassine Elamri

## Exercice 3 : (4.5 pts)

Une urne contient six jetons rouges portant les numéros : 1, 2, 2, 2, 3, 3 et quatre jetons verts portant les numéros : 2, 2, 2, 3 (Tous les jetons sont indiscernables au toucher).
**On tire simultanément au hasard trois jetons de l'urne.**

On considère les événements suivants :

$A$ : **«Les jetons tirés portent le même numéro»**
$B$ : **«Les jetons tirés sont de même couleur»**

**0.5 pt** **1 -** **Montrer que le nombre de tirages possibles est égal à 120.**

On a 10 jetons : $\begin{cases} \text{6 rouges} & : 1-2-2-2-3-3 \\ \text{4 verts} & : 2-2-2-3 \end{cases}$
et on veut tirer 3 jetons.

Donc : $\boxed{\text{Card}(\Omega) = C_{10}^3 = 120}$

**0.75 pt** **2 -** a) **Montrer que $p(A) = \frac{7}{40}$.**
On a :

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{C_6^3 + C_3^3}{120} \\ &= \frac{21}{120} \\ &= \frac{7}{40}. \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{p(A) = \frac{7}{40}}$

**0.75 pt** b) **Calculer $p(B)$.**
On a :

$$\begin{aligned} p(B) &= \frac{\text{Card}(B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{C_6^3 + C_4^3}{120} \\ &= \frac{24}{120} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{p(B) = \frac{1}{5}}$

**1.00 pt** c) **Calculer la probabilité de tirer trois jetons de même couleur sachant qu'ils portent le même numéro.**
Revient à calculer : $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Yassine Elamri

Or :

$$\begin{aligned} p(A \cap B) &= \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(\Omega)} \\ &= \frac{C_3^3 + C_3^3}{120} \\ &= \frac{2}{120} \\ &= \frac{1}{60} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} p_A(B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{60}}{\frac{7}{40}} \\ &= \frac{2}{21} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{p_A(B) = \frac{2}{21}}$

**0.5 pt** d) **Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.**

On a : $p(A) \times p(B) = \frac{7}{40} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{200}$.

Et on a : $p(A \cap B) = \frac{1}{60}$.

Donc : $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$.

Alors : les événements $A$ et $B$ ne sont pas indépendants .

**3 - Soit $X$ la variable aléatoire qui correspond au nombre de couleurs obtenues à chaque tirage.**

**1.00 pt** **Calculer $p(X = 1)$ et $p(X = 2)$.**

Au total on a : deux couleurs donc : $X_\Omega = \{1; 2\}$

**Calculons :** $p(X = 1)$.
**Ici, nous voulons qu'une seule couleur**.

Donc, il s'agit de tirer 3 parmi les 6 rouges ou de tirer 3 parmi les 4 verts.
On a :

$$p(X = 1) = p(B)\frac{C_6^3 + C_4^3}{120} = \frac{1}{5}.$$

D'où : $\boxed{p(X = 1) = \frac{1}{5}.}$

**Calculons :** $p(X = 2)$.
**Ici, nous voulons deux couleurs.**

Donc, il s'agit de tirer une parmi les 6 rouges et de tirer 2 parmi les 4 verts ou de tirer 2 parmi les 6 rouges et de tirer une parmi les 4 verts.
On a :

$$p(X = 2) = \frac{C_6^1 \times C_4^2 + C_6^2 \times C_4^1}{120} = \frac{4}{5}$$

Yassine Elamri

D'où : $\boxed{p(X=2)=\frac{4}{5}.}$

# FIN

Yassine Elamri