ROYAUME DU MAROC

Correction

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : NORMAL 2022

MATHÉMATIQUES

Yassine Elamri

Exercice 1 : (4.5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5}$ pour tout n de $\mathbb{N}$

0,5 pt **1 -** Calculons u_1 et u_2 .

On a :

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{5}u_0 + \frac{8}{5} \\ &= \frac{1}{5} \times 3 + \frac{8}{5} \\ &= \frac{11}{5} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{1}{5}u_1 + \frac{8}{5} \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{11}{5} + \frac{8}{5} \\ &= \frac{51}{25} \end{aligned}$$

Donc : $u_1 = \frac{11}{5}$ *et* $u_2 = \frac{51}{25}$

1 pt **2 -** Montrons par récurrence que $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ on a $u_0 = 3$ et $3 > 2$ donc $u_0 > 2$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$

Supposons que $u_n > 2$ pour n fixé de $\mathbb{N}$ et montrons que $u_{n+1} > 2$

c'est-à-dire montrons que : $u_{n+1} - 2 > 0$

On a tout d'abord :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-2 &= \frac{1}{5}u_n+\frac{8}{5}-2 \\ &= \frac{1}{5}u_n-\frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{5}(u_n-2) \end{aligned}$$

Et puisque $u_n > 2$ alors $u_n - 2 > 0$

D'où $\frac{1}{5}(u_n-2) > 0$ donc $u_{n+1}-2>0$ d'où $u_{n+1} > 2$

D'après le raisonnement par récurrence on a $u_n > 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **3 - a)** Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{5}u_n+\frac{8}{5}-u_n \\ &= \left(\frac{1}{5}-1\right)u_n+\frac{8}{5} \\ &= -\frac{4}{5}u_n+\frac{8}{5} \\ &= \frac{4}{5}(2-u_n) \end{aligned}$$

0.25 pt **b)** Puisque $u_n - 2 > 0$ pour tout n de $\mathbb{N}$ donc $2 - u_n < 0$

D'où $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, u_{n+1}-u_n < 0$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

0,25 pt **4 -** Déduisons que la suite (u_n) est convergente.

Comme la suite (u_n) est décroissante et aussi minorée par 2 $((\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2)$

Alors la suite (u_n) est convergente.

0.25 pt **5 -** Soit (v_n) la suite numérique telle que : $v_n = u_n - 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

a) Calculons v_0

On a : $v_n = u_n - 2$ et $u_0 = 3$ donc : $v_0 = u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$

Alors $v_0 = 1$.

0.5 pt **b)** Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$

$(\forall n \in \mathbb{N})$ on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{5}(u_n - 2)$ (question 2)

Donc $(\forall n \in \mathbb{N})\,;\, v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$

c) Exprimons v_n en fonction de n

Yassine Elamri

On a (v_n) est une suite géométrique

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = v_0 \times q^{n-0} = 1 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad (v_0 = 1 \ \ et \ \ q = \frac{1}{5})$

Donc $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

0,5 pt **6 - a)** Montrons que $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$

On sait que : $v_n = u_n - 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$ donc $u_n = v_n + 2$ et comme $v_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$

Donc : $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2$

0,25 pt **b)** Calculons la limite de la suite (u_n).

On a $\lim \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ Car $-1 < \frac{1}{5} < 1$

donc $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{5}\right)^n + 2 = 0 + 2 = 2$

Donc $\lim u_n = 2$

Exercice 2 : (11 pts)

Partie I

On considère la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par : $h(x) = x^2 - \ln x$

1 pt **1 -** Montrons que $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

On a $u :\to x^2$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (polynôme sur $]0, +\infty[$)

Et $v : x \to \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (fonction primitive de la fonction $x \to \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$)

Donc h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a :

$(\forall x \in]0, +\infty[) \quad h'(x) = (x^2)' - (\ln x)'$

Donc $h'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

Donc $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$

Finalement : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$

2 - Étudions le signe de $h'(x)$ sur $]0, +\infty[$

On a : $h'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} = \frac{2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)}{x} = \frac{2\left(x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{x}$

Puisque $x \in]0, +\infty[$ alors $h'(x)$ a le même signe que $(x - \frac{1}{\sqrt{2}})$

Donc $h'(x)$ est négative sur l'intervalle $\left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ et elle est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$.

Yassine Elamri

https://steinmath.com yesterday, tomorrow better than today

1 pt **3 -** — Calculons $h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$:

$$h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}+\ln(\sqrt{2})=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{1+\ln(2)}{2}$$

— Tableau de variations de h :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	↘	$\frac{1+\ln(2)}{2}$	↗	

0.5 pt **4 -** Déduisons le signe de $h(x)$ sur $]0,+\infty[$

D'après le tableau de variations $\frac{1+\ln(2)}{2}$ est une valeur minimale de h sur $]0,+\infty[$

Donc pour tout $x\in]0,+\infty[$ $h(x)\geqslant\frac{1+\ln(2)}{2}$

Et on a $\frac{1+\ln(2)}{2}>0$

Donc pour tout $x\in]0,+\infty[$ $h(x)>0$

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}+x$ et soit (C) sa courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$(unité 1 cm).

0.5 pt **1 - a)** Calculons $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$

Comme $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x=0^+$; $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(1+\ln x)=-\infty$ Alors $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1+\ln x}{x}=-\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

0.25 pt **b)** Interprétation géométrique de ce résultat.

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

Donc (C) admet une asymptote verticale à droite de 0 d'équation $x=0$

0.5 pt **2 - a)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}+x=0+0+(+\infty)=+\infty$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$

Yassine Elamri

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

0.5 pt **b)** Montrons que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0+0=0$

Car : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} = 0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$

0.25 pt **c)** Interprétation géométrique de ce résultat.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$

Alors (C) admet une asymptote oblique d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

1 pt **3 - a)** Montrons que : $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ pour tout x de $]0,+\infty[$.

On sait que $u_1 : x \to x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ (restriction d'une fonction polynôme)

Et aussi la fonction $u_2 : x \to (1+\ln x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$

Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $(\forall x \in]0,+\infty[)$ on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u_1'(x) + u_2'(x) \\ &= \frac{(1+\ln x)' \times x - (1+\ln x)\times x'}{x^2} + x' \\ &= \frac{\frac{1}{x}\times x - (1+\ln x)\times 1}{x^2} + 1 \\ &= \frac{1-1-\ln x}{x^2} + 1 \\ &= \frac{x^2 - \ln x}{x^2} \\ &= \frac{h(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$

1 pt **b)** Déduisons que la fonction f est croissante sur $]0,+\infty[$.

On a $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$

D'après la question 4 de la partie I $h(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$

Alors $\dfrac{h(x)}{x^2} > 0$

D'où $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad f'(x) > 0$ donc : f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

Yassine Elamri

4 - Soit (Δ) la droite d'équation : $y = x$

0.5 pt **a)** Calculons $f\left(\frac{1}{e}\right)$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\left(\frac{1}{e}\right)} + \left(\frac{1}{e}\right) = e(1-\ln(e)) + \left(\frac{1}{e}\right) = e(1-1) + \left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}$$

Donc : $\boxed{f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}}$

1 pt **b)** Étudions le signe de $f(x) - x$:

On a : $f(x) - x = \frac{1+\ln x}{x} + x - x = \frac{1+\ln x}{x}$

Le signe de $(f(x) - x)$ dépend du signe de $(1 + \ln x)$ $(x \in]0, +\infty[)$

On a : $1 + \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq -1 \Leftrightarrow \ln x \geq -\ln e \Leftrightarrow \ln x \geq \ln\frac{1}{e} \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{e}$

Donc $(f(x) - x)$ est positive sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ et négative sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$

0.5 pt **c)** Déduisons la position relative de (C) par rapport à (Δ) :

On a : $(f(x) - x)$ est positive sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$ donc (C) est en dessus de (Δ) sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$

On a : $(f(x) - x)$ est négative sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$ donc (C) est en dessous de (Δ) sur $\left]0, \frac{1}{e}\right]$

1.5 pt **5 - a)** • Calculons $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$

On a $H : x \mapsto \ln x$ est une fonction primitive de la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$

Donc : $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = [\ln x]_{\frac{1}{e}}^{1} = \ln 1 - \ln(\frac{1}{e}) = 0 - (-\ln(e)) = 1$

Donc $\boxed{\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = 1}$

• Calculons $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x$

Yasine Elamri

On a :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\times\ln(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{1}(\ln(x))'\times\ln(x)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}\\ &= (\frac{(\ln 1)^2}{2})-(\frac{(\ln(\frac{1}{e}))^2}{2})\\ &= 0-(\frac{(-\ln(e))^2}{2})\\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc : $\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$

1 pt **b)** Déduisons l'aire de la partie hachurée

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie hachurée

On a l'aire de la partie hachurée est l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), la droite d'équation $y=x$ et les droites d'équations respectivement $x=\frac{1}{e}$ et $x=1$

Donc $\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{e}}^{1}|f(x)-x|\mathrm{d}x\times u.a = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(f(x)-x)\mathrm{d}x\times u.a$ car $(f(x)-x)$ est positive sur $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$ (d'après la question 4.a)

Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1+\ln(x)}{x}+x-x\mathrm{d}x\times u.a\\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x\times u.a\\ &= \int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\times u.a+\int_{\frac{1}{e}}^{1}\frac{\ln(x)}{x}\mathrm{d}x\times u.a\\ &= (1-\frac{1}{2})\times u.a = \frac{1}{2}cm^2 \quad \text{(d'après la question 5.a)}\\ &= \frac{1}{2}cm^2\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{A} = \frac{1}{2}cm^2$

Yassine Elamri

Exercice 3 : (4.5 pts)

Un sac contient 9 boules indiscernables au toucher : *cinq* boules blanches numérotées $1-2-3-3-3$ et **quatre** boules noires numérotées $1-2-3-3$.

On tire **simultanément** au hasard **deux** boules du sac.

Soient les deux événements suivants :

A : " Les deux boules tirées sont de même couleur "

B : " L'une exactement des deux boules tirées porte le numéro 3 "

1 pt **1 - a)** Montrons que $p(A) = \frac{4}{9}$

On considère l'univers Ω, Le tirage est simultané donc $card(\Omega) = C_9^2 = 36$

les boules sont indiscernables au toucher signifie que $p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)}$

$A : (B, B)$ où (N, N) d'où $card(A) = C_5^2 + C_4^2 = 10 + 6 = 16$

donc $p(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

Ainsi : $p(A) = \frac{4}{9}$

0.5 pt **b)** Calculons $p(B)$

On a $B : (3, \overline{3})$

On a 5 boules portent le numéro 3 et 4 boules portent un numéro autre que 3 ($\overline{3}$)

donc $card(B) = C_5^1 \times C_4^1 = 5 \times 4 = 20$

donc $p(B) = \frac{card(B)}{card(\Omega)} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

Donc : $P(B) = \frac{5}{9}$

1 pt **c)** Calculons $p(A \cap B)$

On a l'événement $A \cap B$ est tiré deux boules blanches une porte le numéro 3 et l'autre ne porte pas le numéro 3 ou bien deux boules noires une porte le numéro 3 et l'autre ne porte pas le numéro 3.

C'est à dire : $A \cap B : (B_3, B_{\overline{3}})$ $ou (N_3, N_{\overline{3}})$

On a trois boules blanches portent le numéro 3 et deux boules blanches ne portent pas

Yassine Elamri

le numéro 3 et deux boules noires portent le numéro 3 et deux boules noires ne portent pas le numéro 3.

Donc $card(A \cap B) = C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1 = 3 \times 2 + 2 \times 2 = 6 + 4 = 10$

Alors $p(A \cap B) = \dfrac{10}{36} = \dfrac{5}{18}$

Ainsi $p(A \cap B) = \dfrac{5}{18}$

0.5 pt **d)** A et B sont-ils indépendants ?

On a $p(A) \times p(B) = \dfrac{4}{9} \times \dfrac{5}{9} = \dfrac{20}{81}$ *et* $p(A \cap B) = \dfrac{5}{18}$

Donc $p(A) \times p(B) \neq p(A \cap B)$

D'où A et B ne sont pas indépendants

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules blanches tirées et qui portent le numéro 3.

1 pt **a)** On a trois boules blanches qui portent le numéro 3 (B_3) et six autres boules ($\overline{B_3}$).

Les boules tirées	x_i la valeur de X	$card(X = x_i)$
les deux boules sont $\overline{B_3}, \overline{B_3}$	0	$C_6^2 = 15$
les deux boules sont $B_3, \overline{B_3}$	1	$C_6^1 \times C_3^1 = 6 \times 3 = 18$
les deux boules sont B_3, B_3	2	$C_3^2 = 3$

Donc :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\dfrac{15}{36}$	$\dfrac{18}{36}$	$\dfrac{3}{36}$

0.5 pt **b)** Calculons $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

$E(X) = \dfrac{15}{36} \times 0 + \dfrac{18}{36} \times 1 + \dfrac{3}{36} \times 2 = \dfrac{24}{36} = \dfrac{2}{3}$

Donc : $E(X) = \dfrac{2}{3}$

Yassine Elamri