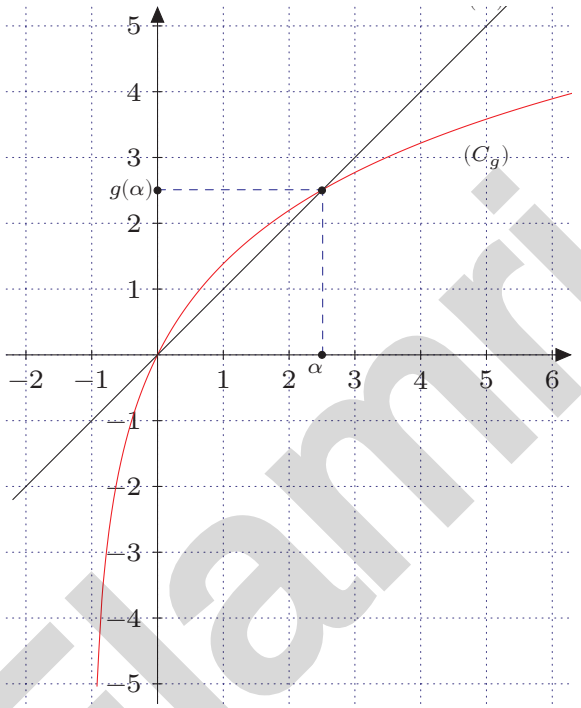
Problème : 1

Partie : I

1 Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_g)$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x)=2\ln(x+1)$ et (Δ) la droite d'équation $y=x$ dans le repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.



a Résoudre dans $]-1,+\infty[$ l'équation : $g(x)=x$

b Résoudre dans $]-1,+\infty[$ les inéquations suivantes : $g(x)>x$ et $g(x)<x$

c Dresser le tableau de signe de $g(x)-x$

2 a Résoudre dans $]-1,+\infty[$ l'équation suivante :
$(E):(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)-2=0$

b Résoudre dans $]-1,+\infty[$ les inéquations suivantes :
$(I_1):(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)-2<0$ et
$(I_2):(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)-2>0$

Partie : II

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(x)=(\ln(x+1))^2+\ln(x+1)-x-2$$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1 Calculer : $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenue

2 a Montrer que : $(\forall x\in]0,+\infty[)\quad \dfrac{(\ln(x+1))^2}{x}=4\left(\dfrac{\ln(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}\times\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)^2$

b Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x+1))^2}{x}$ Prof : TADOUMMANT

c Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$

d En déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique vers la droite (D) d'équation $y=-x$

3 Étudier la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et la droite (D)
(Indication : utiliser les résultats de question 2 **Partie I**)

4 a Montrer que : $(\forall x\in]-1,+\infty[)\quad f'(x)=\dfrac{2\ln(x+1)-x}{x+1}$

b Étudier le sens de variations de f

c Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $]-1,+\infty[$

5 a Montrer que : $(\forall x\in]-1,+\infty[)\quad f''(x)=\dfrac{1-2\ln(x+1)}{(x+1)^2}$

b Montrer que $A(\sqrt{e}-1;f(\sqrt{e}-1))$ est un point d'inflexion à la courbe $(\mathcal{C}_f)$

c Étudier la convexité de $(\mathcal{C}_f)$

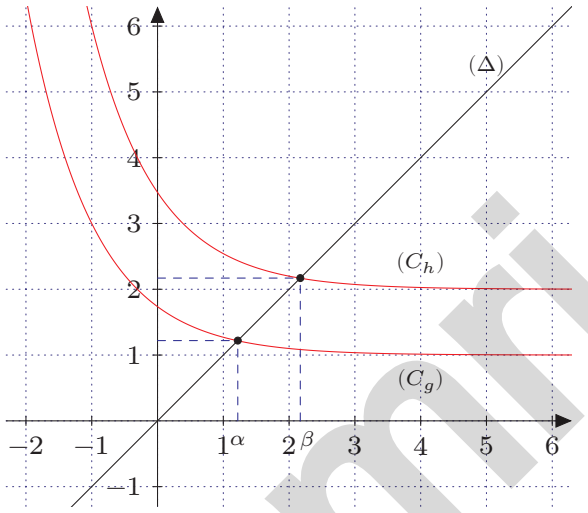
6 Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans un repère orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ ($\alpha\backsimeq 2.51$)

Yassine Elamri

Problème : 2

Partie : I

Dans la figure ci-contre (C_g) et (C_h) sont respective les courbes des fonction g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 2e^{-x-1}$ et $h(x) = 2g(x)$
Soit (Δ) la droite d'équation $y = x$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
- $(E_1) : g(x) = x$
- $(E_1) : h(x) = x$

2 Étudier le signe de :
- $x - h(x)$
- $g(x) - x$

Partie : II

Prof : TADOUMMANT

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-x}\left(x - \dfrac{1}{e^{x+1}} + e^{x-1}\right)$
$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ $\left(||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1cm\right)$

1 a Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = e^{-x}\left(x - \dfrac{1}{e^{x+1}}\right) + e^{-1}$

b Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ (Indication $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{1}{e^t} = +\infty$)

c Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

2 a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = xe^{-x} - e^{-2x-1} + e^{-1}$

b Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e^{-1}$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

3 a Vérifier que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \dfrac{f(x)}{x} = e^{-x} + 2e^{-1} \times \dfrac{e^{-2x} - 1}{-2x}$

b En déduire que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e+2}{e}$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

4 a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = e^{-x}(g(x) - x)$

b En déduire que : f est strictement croissante sur $]-\infty, \alpha]$ et qu'elle est strictement décroissante sur $[\alpha, +\infty[$

c Dresser le tableau de variations de la fonction f

5 a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x) = (x - h(x))\, e^{-x}$

b Étudier le signe de $f"(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

c En déduire que le point $A(\beta, f(\beta)$ est un unique point d'inflexion de $C(C_f)$, puis étudier la convexité de (C_f)

6 Tracer les courbes (C_f) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$
On donne : $\alpha \simeq 1.22$; $f(\alpha) \simeq 0.85$ $\beta \simeq 2.17$ et $f(\beta) \simeq 0.6$

Yassine Elamri

Problème : 3

Partie : I

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -e^{-x+1}(x+1-e^x)$
$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ $\left(||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1cm\right)$

1. a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \dfrac{f(x)}{x} = -e^{-x+1} + \dfrac{e^x - 1}{x} \times e^{1-x}$
   b En déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.
2. a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = \left(1 + \dfrac{2}{x-1}\right)(-x+1)e^{-x+1} + e$
   b Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = e$, et donner une interprétation géométrique de ce résultat.
3. a Montrer que : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
   b Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis déduire que la courbe $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$
4. a Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = xe^{-x+1}$
   b En déduire que : f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et qu'elle est strictement croissante sur $[0, +\infty[$
   c Dresser le tableau de variations de la fonction f
5. a Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x) = (1-x)\,e^{-x+1}$
   b Étudier le signe de $f"(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
   c En déduire que le point $A(1, e-2)$ est un unique point d'inflexion de $C(C_f)$, puis étudier la convexité de (C_f)
6. Tracer les courbes (C_f) dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$

Partie : II

Prof : TADOUMMANT

Soit la fonction g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x) - x$ et par le tableau de variations ce-dessous :

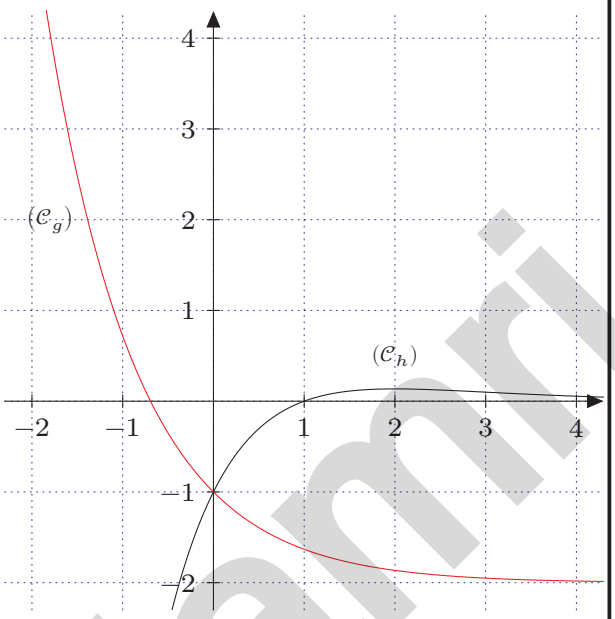
x	$-\infty$		$+\infty$
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

1. a Calculer $g(0)$, puis étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   b En déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est en dessous de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $]-\infty, 0]$, et au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$
2. On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 \in [0,1] \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$
   a Montrer par récurrence que : $0 \leq u_n \leq 1$
   b Démontrer que (u_n) est décroissante
   c En déduire que (u_n) est convergente, puis calculer sa limite

Yassine Elamri

Problème : 4

Partie I :



1. Dans la figure ci-contre $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{C}_h)$ sont des courbes respectives des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{-x} - 2$ et $h(x) = e^{-x}(x-1)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
   a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{-x} = 2$, puis en déduire la valeur de α
   c. Résoudre géométriquement les inéquations suivantes : $g(x) > 0$ et $g(x) < 0$
   d. Dresser le tableau de signe de $g(x)$, puis en déduire le signe de $(1-x)g(x)$
2. a. Résoudre géométriquement : $g(x) = h(x)$; $(I_1) : g(x) < h(x)$ et $(I_2) : g(x) > h(x)$
   b. En déduire le signe de $h(x) - g(x)$

Partie II :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\,(e^{-x} - 2) + x^2 + 1$
$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1. a. Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x} - 2}{x} = -\infty$, puis En déduire que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat
2. a. Montrer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
   b. Monter que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$
3. a. Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$,puis donner une interprétation géométrique de ce résultat
   b. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad f'(x) = (1-x)(e^{-x} - 2)$
   c. Dresser le tableau de variations de f
4. a. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad ; \quad f''(x) = e^{-x}(x-1) - (e^{-x} - 2)$
   b. Étudier le signe de f'' sur $\mathbb{R}$
   c. En déduire la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$, puis préciser l'abscisse de se point d'inflexion.
5. Soit la fonction u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = f(x) - x$ et par le tableau de variations ce-dessous :

x	$-\infty$		-0.9		1.58		$+\infty$
$f(x)-x$	$-\infty$	↗	2.63	↘	-0.88	↗	$+\infty$

   a. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet exactement trois solutions a ; b et c et que : $-2 < a < 0 < b < 1 < c < 3$.
   b. En déduire le signe de $f(x) - x$, et que la droite (D) d'équation $y = x$ est en dessous de $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $]-\infty, a]$ et $[b, c]$, et au-dessus de $(\mathcal{C}_f)$ sur les intervalles $[a, b]$ et $[c, +\infty[$

Yassine Elamri

6 Construire la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et la droite $(\mathcal{D})$ dans le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$
(On prend :$||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 2cm$; $a = -1.66$; $b = 0.53$ et $c = 2.52$)

Problème : 5

Partie I :

On donne l'encadrement suivant : $(\forall x \in]-\infty, 0[)$; $\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + 1 \leq e^x \leq \dfrac{x^2}{2} + x + 1$

1 Montrer que : $(\forall x \in]-\infty, 0[)$; $\dfrac{2x^3 + 3x^2}{6x^2} \leq \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

2 En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

3 Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x$ (prend $t = \dfrac{1}{x}$)

Partie II :

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = x\left(\ln(x) - x\ln(x+1)\right) & ; x > 0 \\ f(x) = x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) & ; x < 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

$(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1 a Étudier la continuité de la fonction f en $x_0 = 0$

b Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, et donner une interprétation géométrique de ce résultat.

c Étudier la dérivabilité de f à gauche de 0

2 a Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 1$, puis En déduire que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x + \dfrac{1}{2}) = 0$, puis donner une interprétation géométrique de ce résultat.

3 a Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty}$

b Monter que $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

4 Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

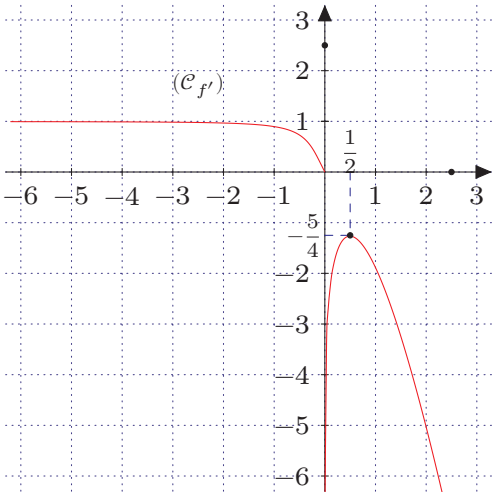
5 En exploitant la courbe $(\mathcal{C}_{f'})$ ci-dessous, de la fonction dérivée f' de f sur $]-\infty, 0[\cup]0; +\infty[$

a Prouver que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$, et strictement décroissante sur $]0; +\infty[$

b Dresser le tableau de variations de f

c Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]-\infty, 0[\cup]0; +\infty[$

d Déduire la concavité de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ en précisant l'abscisse de se point d'inflexion.



6 Soit la fonction g la restriction fe la fonction f sur $]-\infty, 0[$

a Montrer que la fonction g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un un intervalle J à déterminer.

Yassine Elamri

b Dresser le tableau des variations de g^{-1}

c Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} g^{-1}(x) - x = -\dfrac{1}{2}$

d Tracer $\left(\mathcal{C}_f\right)$ et $\left(\mathcal{C}_{g^{-1}}\right)$ dans le même repère orthonormée $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Yassine Elamri