Exercice n°1 :3 points

Le plan (P) est rapporté un repère orthonormé $(O, \vec{i}; \vec{j})$. . On considère l'ensemble (C) des points $M(x, y)$ qui vérifiant : $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ et le point $A(4; 2)$.

1. Justifier que l'ensemble (C) est un cercle de rayon $R = 3$ et de centre à déterminer ses cordonnées. *(1pt)*
2. Etudier la position de A au cercle (C) . *(0.5pt)*
3. Résoudre graphiquement : $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 \leq 0 \\ y - x \leq 0 \end{cases}$ *(1.5pt)*

Exercice n°2 :2.5 points

Soit $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ une suite numérique définie par : $u_n = 7n - 5$

1. Calculer u_0 et u_1 et u_2 et u_{10} . *(1pt)*
2. Est-ce que 2023 un terme de la suite ?justifier votre réponse. *(0.5pt)*
3. Montrer que la suite (u_n) est arithmétique de raison r à déterminer. *(1pt)*

Exercice n°3 :6.5 points

Soit $(u_n)_{(n\in\mathbb{N})}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 4u_n + 3$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculer u_1 et u_2 . *(1pt)*
2. Montrer par réccurence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n > -1$. *(1pt)*
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n). *(1pt)*
4. On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = u_n + 1$.
   - (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique en précisant sa raison q. *(1pt)*
   - (b) Calculer v_0 puis Exprimer v_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$. *(0.5pt)*
   - (c) Déduire U_n en fonction de n pour tout n de $\mathbb{N}$. *(0.5pt)*
   - (d) Calculer en fonction de n la somme suivante :$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$. *(0.5pt)*
5. Calculer en fonction de n la somme suivante :$T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. *(1pt)*

Exercice n°4 :8 points

1. Sachant que :$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ .calculer $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. *(1pt)*
2. Sachant que : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ calculer $sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)$. *(1pt)*
3. Sachant que : $tan(a) = \frac{1}{2}$ et $tan(b) = \frac{1}{3}$ calculer la valeur de $tan(a + b)$. *(1pt)*
4. Pour tout réel x. On pose : $f(x) = 1 + cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.
   - (a) Calculer $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. *(0.5pt)*
   - (b) Montrer que : $cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}cos\left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$. *(1pt)*
   - (c) Montrer que : $f(x) = 2\sqrt{2}cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)cos\left(x - \frac{5\pi}{6}\right)$. *(1.5pt)*
   - (d) Déduirela valeur excate de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$. *(0.5pt)*
   - (e) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $f(x) = 0$. *(1.5pt)*

Yassine Elamri