Exercice 1

On considère la suite numérique (U_n) définie par : $U_0 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 4}{U_n + 5}$

1. Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_n > 2$.
2. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ U_{n+1} - 2 < \dfrac{3}{7}(U_n - 2)$
3. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N});\ (U_n - 2) < (\dfrac{3}{7})^n$
4. On suppose $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que V_n est une suite géométrique dont on déterminera sa raison et son premier terme
   (b) Écrire V_n et U_n en fonction de n
   (c) Calcule en fonction de n .
   $$S_n = V_0 + V_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + V_{n-1}$$

Exercice 2

Pour tout nombre réel x on pose : $A(x) = \sqrt{3}\sin(4x) - 8\sin^2(x)\cos^2(x)$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $2\cos(x) - 1 = 0$
2. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R});\ 1 - \cos(4x) = 8\sin^2(x)\cos^2(x)$
   (b) En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R});\ A(x) = 2\cos(4x - \dfrac{\pi}{3}) - 1$
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $A(x) = 0$
   (b) Résoudre dans l'intervalle $[\dfrac{-\pi}{6}; \dfrac{\pi}{3}]$, l'inéquation $A(x) < 0$

Exercice 3

Soit α un nombre réel de l'intervalle $]\dfrac{-\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}[$.
Montrer que :

$$\sqrt{\frac{1+\sin(\alpha)}{1-\sin(\alpha)}} - \sqrt{\frac{1-\sin(\alpha)}{1+\sin(\alpha)}} = 2\tan(\alpha)$$

Yassine Elamri