Devoir à domicile

N° : 01

Yassine Elamri

Exercise 0.1: Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Donner la valeur de vérité des propositions suivantes:
   A : "Tout les nombres réels sont positifs"
   B : "Il existe un unique élément x dans $\mathbb{R}$ tel que $x^3 = 0$"
   C : "$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right); x^2 + 2x = y^2 + 2y \Rightarrow x = y$"

2. Complèter le tableau suivant :

Proposition	Proposition quantifié	Négation de la proposition quantifié
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante		
		$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N}) : nx^2 + 7n \geq x$
	$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists! n \in \mathbb{N}) : n \leq x < n+1$	
		$\exists (x;y) \in D_f : f(x) \neq f(y)$
	$(\exists! x_0 \in \mathbb{R}) : 3x + 5 = 2x + 7$	
le carré d'un nobre réel est positif		

3. a. Par disjonction des cas montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $n(n+1)$ est un nombre paire.
   b. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$
   c. Déduire la somme des entières inférieur au égale à 100.

4. Soit p et q deux proposition.
   a. Donner la table de vérité de la proposition "$p \Longrightarrow q$".
   b. A-t-on la proposition "$p \Longrightarrow q$"est fausse?
   c. Déduire la valeur de vérité de la proposition "n entier naturel paire $\Longrightarrow$ $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 8".

5. Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) : 3yx^2 + x = 7 - y$.

6. Par contra-position montrer que : $\left(\forall (x;y) \in]1;+\infty[^2\right) : x \neq y \Longrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} \neq \dfrac{y+1}{y-1}$.

7. Montrer que $\sqrt{\dfrac{5}{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Solution on page ??

Exercise 0.2: Soit f la fonction définie par $f(x) = x|x| - 2x$.

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.

Yassine Elamri

3 Montrer que f admet un minimum en 1 sur $[0;+\infty]$.

4 déduire que $f(-1)$ est un maximum de f sur $[-\infty;0]$.

5 Soient x et y deux réels tels que $x \neq y$. On pose $T(x;y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

a vérifier que :

$$\begin{cases} T(x;y) = x+y-2\ ;\forall (x;y) \in [0;+\infty[^2 \\ T(x;y) = 2-x-y\ ;\forall (x;y) \in]-\infty;0]^2 \end{cases}$$

b Déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$.

c Dresser le tableau des variations de f sur $[0;+\infty[$.

d Représenter la courbe $(\mathscr{C}_f)$ de f sur $[0;+\infty[$ dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$, puit déduire la courbe de f sur $]-\infty;0]$. (Utiliser la parité de f)

Solution on page **??**

Exercise 0.3:

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{1}{x+a} - \dfrac{a^2x^2}{a^3+x^3}$; avec $a \in \mathbb{R}$

1 Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f

2 Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f admet une limite quand x tend vers à $-a$

3 On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{bx^2+(c+1)x-d}{a^3+x^3}$ avec $(b,c,d) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les valeurs de b, c et d en fonction de a pour lesquelles $f(x) = g(x)$

4 On pose $a = 2$; calculer $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)$

Solution on page **??**

Exercise 0.4: Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}-2}{x}$;

1 Déterminer D_g l'ensemble de définition de la fonction g

2 Montrer que : $\forall x \in D_g$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} - \frac{1}{\sqrt{1-x}+1}$$

3 Calculer : $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

Solution on page **??**

Yassine Elamri

Exercise 0.5: Soit h ; h_1 et h_2 des fonctions numériques définie par : $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-2x+2}{x^2-4}$; $h_1(x) = \dfrac{1}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}$ et $h_(x) = -\dfrac{2}{x+2}$

1. Déterminer D_h l'ensemble de définition de la fonction h
2. Montrer que : $\forall x \in D_h$
   $h(x) = h_1(x) + h_2(x)$
3. Calculer : $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$

Solution on page **??**

Exercise 0.6: Soit u la fonction numérique définie par : $u(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}$

1. Déterminer D_u l'ensemble de définition de la fonction u
2. Montrer que :$\forall x \in D_u$
   $u(x) = -\dfrac{x^2}{(x+1)(\sqrt{x+2}+2} - 2$
3. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 2} u(x) = \dfrac{-9}{4}$

Solution on page **??**

Yassine Elamri