MATHEMATIQUES

⋆⋆⋆ CONTRÔLE N 1 ⋆⋆⋆

- L'homme propose et DIEU dispose -

Ex 1

1. Calculer les limites suivantes : ..... (3pt)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan(\sqrt[3]{x}-1)}{\sqrt{x}-1}$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\sqrt[3]{x}-a\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x}-a\sqrt[4]{a}}$

2. Soit a et b deux réels.

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2-bx, & x\leq 2 \\ f(x)=a-\dfrac{2}{x}, & 2<x\leq 4 \\ f(x)=\sqrt{x+4}, & x>4 \end{cases}$ ..... (1.5pt)

Déterminer les valeurs de a et b pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$

3. On Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que : ..... (1.5pt)

- L'équation $g(x)=x$ admet deux solution a et b avec $a<0<b$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ f(x)<x$

Montrer que $(\exists\alpha\in\mathbb{R})\ f(\alpha).g(\alpha)=\alpha^2$

Ex 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)+2\arctan(x)\right)$

1. (a) Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \arctan\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)=\dfrac{\pi}{4}-\arctan(x)$ ..... (1.5pt)

(b) En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\arctan(x)+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ..... (0.5pt)

2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ ..... (1pt)
3. Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un inetrvalle J à déterminer (0.75pt)
4. Déterminier $f^{-1}(x)$ $(\forall x\in J$ ..... (1.25pt)

Ex 3

On considère la fonction g définie par :$g(x)=\arctan\left(\left(\sqrt{x}-1\right)^3\right)$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{g(x)}{x-1}$ ..... (1pt)
2. Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J à déterminer (1.5pt)
3. Déterminer $g^{-1}(x)\ \forall x\in J$ ..... (1.5pt)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

Ex 4

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :$(\forall n \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} u_0 = -\dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{\sqrt{1+u_n^2}} - 1 \end{cases}$

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = \dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}} - 1$

1. (a) Montrer que $f([-1,0]) \subset]-1,0]$ ..... (1pt)
   (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ -1 < u_n < 0$ ..... (0.5pt)
2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est strictement décroissante ..... (0.75pt)
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_n$ est convergente ..... (0.25pt)
3. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$ ..... (1.5pt)
   (b) monter que : $\lim u_n \leq -\dfrac{1}{2}$ ..... (0.5pt)
   (c) En déduire $\lim u_n$ ..... (0.5pt)

Ex.F 1

On considère la suite $(v_n)_{n>0}$ définie par :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^k}$

1. Montrer que : $(\forall n \mathbb{N}^*)\ v_n - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^k} = \dfrac{1}{n}\left(u_n - \dfrac{n}{n^n}\right)$
2. En déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ v_n = \dfrac{n}{(n-1)^2} - \dfrac{n^2}{(n-1)^2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$
3. En deduire $\lim u_n$

Ex.F 2

Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ \phi(x) = \sqrt[n]{x^{n-1}}$

1. Montrer que $\forall x \in]0,1[\ x < \phi(x)$
2. En déduire pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*\ \phi(a+b) < \phi(a) + \phi(b)$

Ex.F 3

Soient n , m et p des entiers na turels tels que $m+1 \leq p$ et $p < n$
On pose $I = \{0, 1, ..., n-1\}$

On considère la suite $(X_p)_{p \in I}$ définie par : $(\forall p \in I)\ X_p = \sum_{k=0}^{p} (C_{n-k}^{m} + C_{n-p}^{m+1})$

1. Etudier la monotonie de $(X_p)_{p \in I}$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} = C_{n+1}^{m+1} + C_{n-p+1}^{m+1}$

Yassine Elamri