AREF : SOUS MASSA Direction : TATA Lycée : ELMANSOUR DAHBI Pr : https://steinmath.com Niveau : 2BSM(biof)	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني	Matière : Mathématique Semestre : 01 Année scolaire : 2019/2020 Durée : 2H Le :

Contrôle N° 01

Barème	Contenue
(5pts)	**Exercices 01**
3pts	1- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\arctan\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}{\sqrt{2-x}-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\times\sqrt[6]{x}$
1.5pt	2- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{2\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-3}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt{x}-3}$; $x\neq 1$ Montrer que f admet un prolongement par continuité au point $x_0=1$, puis donner ce prolongement
0.5pt	3- Soit f la fonction numérique continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)=f(b)$ Montrer que $\exists t\in\left[a,\dfrac{b-a}{2}\right] / f(t)=f\left(t+\dfrac{b-a}{2}\right)$
(5pts)	**Exercices 02**
	Soit f la fonction définie par : $f(x)=\arctan\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$
1pt	1- Sans étudier les variations de f montrer que pour tout réel x, on a : $0<f(x)<\dfrac{\pi}{2}$
1pt	2- Montrer que pour tout réel x, on a : $1-\tan^2\left(f(x)\right)=2x\tan\left(f(x)\right)$
1pt	3- En déduire que pour tout réel x : $x=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-2f(x)\right)$
0.5pt	4- Etablir que pour tout réel x, on a : $f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\arctan(x)$
0.5pt	5- Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J à déterminer.
1pt	6- Déterminer $f^{-1}(x)$ $\forall x\in J$.
(8.5pts)	**Exercices 03**
	Partie A : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\dfrac{x\arctan(x)}{\pi}$
1pts	1- Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$
0.5pt	2- Vérifier que $\forall x\in\mathbb{R}^+$ on a : $f(x)\leq\dfrac{1}{2}x$
1pt	3- Montrer que g la restriction de f sur l'intervalle $]0,1]$ réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle J à déterminer, puis en déduire que $f(]0,1])\subset]0,1]$

Yassine Elamri

Partie B :

Soit la suite numérique définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n \arctan(u_n)}{\pi} \end{cases}$

0.5pt 1- a- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} u_n$

1pts b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_n \leq 1$

1pt c- En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente

1.5pt 2- Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n u_0$, puis déterminer $\lim u_n$

3- Considérons la suite numérique (S_n) définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

0.5pt a- Vérifier que la suite (S_n) est strictement croissante

1pts b- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $u_0 \leq S_n \leq 2u_0\left(1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

0.5pt c- En déduire que la suite (S_n) est convergente

Exercices 04

(1.5pts) Soit (U_n) et (V_n) les deux suites définies pour tout $n \geq 1$ par :

$U_n = -2\sqrt{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ et $V_n = -2\sqrt{n} + \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$

Montrer que le deux suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes

Exercices facultatif

Soit la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $X_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\dfrac{1}{k^2+k+1}\right)$

0.5pt **1-** Montrer que $(\forall p \in \mathbb{N})$ $\arctan(p+1) - \arctan(p) = \arctan\left(\dfrac{1}{p^2 p+1}\right)$

0.5pt 2- Calculer $\lim X_n$

Yassine Elamri

L'homme propose et DIEU dispose