MATHEMATIQUES

⋆⋆⋆ CONTRÔLE N 2 ⋆⋆⋆

- L'homme propose et DIEU dispose -

Ex 1

Partie : I

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=2x^2+\sqrt{x}-2$

1. Calculer $g'(x)$ $(\forall x\in]0,+\infty[)$ ..... (0.5pt)
2. Dresser le tableau de variations de g ..... (0.5pt)
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0,1[$ .. (1pt)
4. En déduire le signe de $g(x)$ $(\forall x\in[0,+\infty[)$ ..... (0.75pt)

Partie : II

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x}+x-2$ (C_f) sa courbe représentatif dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$, puis interpréter le résultat obtenu ..... (0.75pt)
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ ..... (1pt)
3. Montrer que la droite (D) : $y=x-2$ est une asymptote oblique de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty[$ ..... (1pt)
4. (a) Montrer que : $(\forall x\in[0,+\infty[)\ f(x)-x+2=\dfrac{1-x}{x(1+\sqrt{x})}$ ..... (0.75pt)

   (b) En déduire que : $\begin{cases} f(x)\geq x-2 \quad si\ \ x\in]0,1] \\ f(x)\leq x-2 \quad si\ \ x\in]1,+\infty[\end{cases}$ ..... (0.5pt)
5. (a) Montrer que :$(\forall x\in]1,+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{2x^2}$ ..... (1.25pt)

   (b) En déduire que f est décroissante sur $]0,\alpha]$ et croissante sur $[\alpha,+\infty$ ..... (0.5pt)

   (c) Dresser le tableau de variations de la fonction f ..... (0.5pt)
6. Soit h la restriction de la fonction f sur $[1,+\infty[$

   (a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. ..... (1pt)

   (b) Dresser le tableau de variations de h^{-1} ..... (0.25pt)
7. Tracer les courbes (C_f) et $C_{h^{-1}}$ dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ ..... (1.75pt)
   On pose $\alpha\simeq 0.75$ et $f(\alpha)\simeq -1.07$

Ex 2

On considère la suite (u_n) définie par :$(\forall n\in\mathbb{N})$ $\begin{cases} u_0=5 \\ u_{n+1}=\dfrac{7u_n+4}{2u_n+5} \end{cases}$

1. (a) Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}-2=\dfrac{3(u_n-2)}{2u_n+5}$ ..... (0.75pt)

   (b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ $u_n>2$ ..... (1pt)

Yassine Elamri

2. (a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{-2(u_n+1)(u_n-2)}{2u_n+5}$ ..... (1pt)

   (b) Montrer que la suite (u_n) est convergente ..... (0.75pt)

3. Soit (v_n) une suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n + 1}$

   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{3}$, puis déterminer se premier terme ..... (1.5pt)

   (b) Écrire v_n en fonction de n ..... (0.75pt)

   (c) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{4 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}{2 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$, puis calculer $\lim u_n$ ..... (1.25pt)

Ex 3

Calculer la limite des suite suivantes :

1. $u_n = n^2 sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$ ..... (0.5pt)
2. $v_n = \dfrac{2^n - 5^n}{4^n + 7^n}$ ..... (0.25pt)
3. $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n+n}}$ ..... (0.25pt)

Ex.F 1

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction dérivable
On supposone qu'ile existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on a$|f'(x)| \leq k$

1. On dit que $\gamma \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(\gamma) = \gamma$
   Démontrer que f admet un point fixe
2. Démontrer que ce point fixe est unique, on le note γ
3. Soit $(U_n)_n$ une suite récurrente définie par : $U_0 \in [a, b]$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   Démontrer que la suite $(U_n)_n$ est convergente vers λ

Ex.F 2

Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ vérifiant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe $0 < x_1 < x_2 < ....x_n < 1$ virifiant $g'(x_1) + g'(x2) + ... + g'(x_n) = n$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Yassine Elamri