2023/2024 — SteinMaths

Contrôle N : 01

Niveau : 2BACSX — Lycée : Elmansour Dahbi

Exercice : 1

1 Calculer les limites suivantes : ..... (3pt)

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\arctan(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{a}\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}$ $(a>0)$

2 On pose : $l=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$

a Montrer que l est un solution d'équation $x^3-3x-18=0$
(utiliser $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$) ..... (1pt)

b En déduire que $l=3$ ..... (0.5pt)

3 Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sum_{k=1}^{n} cos(kx)$ $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,\pi]$ ... (1pt)

Exercice : 2

Soit u une fonction continue strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ telle que $u(\mathbb{R}^+)=\mathbb{R}^+$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} f(x)=arcatn\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u(x)}-u(x)\right)\right) & x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

1 Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$ ..... (0.5pt)

2 a Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\left(\exists!\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)\ u(x)=tan(\alpha)$ ..... (0.5pt)

b En déduire que $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ ; f(x)=\dfrac{\pi}{2}-2arctan(u(x))$ ..... (1.25pt)

3 a Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle J à déterminer ..... (1pt)

b Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$ dans le cas $u(x)=x^3$ ..... (0.5pt)

4 Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathbb{R}^+$ on pose $f_n(x)=\dfrac{\pi}{2}-2arctan(\sqrt[n]{x})$ et $g_n(x)=f_n(x)-x$

a Montrer que l'équation $g_n(x)=0$ admet une solution unique α_n dans $\mathbb{R}^+$ ..... (1pt)

b vérifier que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ 0<\alpha_n<1$ ..... (0.75pt)

c Etudier la monotonie de (α_n) ..... (0.75pt)

Exercice : 3

Soit f_n une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x)=x^n-n(x-1)-2$ avec n un entier naturel $(n>2)$

1 Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ admet deux solutions u_n et v_n et que $u_n<1<v_n$ (1.25pt)

2 a Étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ ..... (1pt)

b Etudier la monotonie de (u_n), puis en déduire que la suite (u_n) est convergente (0.75pt)

c Montrer que $(\forall n\geq 3)\ \dfrac{-2}{n}\leq u_n-1\leq\dfrac{-1}{n}$, puis calculer $\lim u_n$ ..... (1pt)

3 a Etudier la monotonie de (v_n), puis en déduire que la suite (v_n) est convergente ... (1pt)

b Montrer que $(\forall n\geq 3)\ v_n>1+\dfrac{1}{n}$ (on pose : $(\forall n\geq 3)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n<3$) ..... (1pt)

Yassine Elamri

Today better than yesterday, tomorrow better than today

c Montrer que : $(\forall x > 0)(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ (1+x)^n \geq 1 + nx + \dfrac{n(n-1)}{2}x^2$ ..... (0.5pt)

d Calculer $f_n\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, puis en déduire que : $(\forall n \geq 3)\ v_n < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ ..... (1.25pt)

e Calculer $\lim v_n$ ..... (0.5pt)

Exercice Facultatiif : 1

On considère la suite $(v_n)_{n>0}$ définie par :$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ v_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{n^k}$

1 Montrer que : $(\forall n\mathbb{N}^*)\ v_n - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^k} = \dfrac{1}{n}\left(u_n - \dfrac{n}{n^n}\right)$

2 En déduire $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ v_n = \dfrac{n}{(n-1)^2} - \dfrac{n^2}{(n-1)^2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$

3 En deduire $\lim u_n$

Exercice Facultatiif : 2

Soit ϕ une fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})\ \phi(x) = \sqrt[n]{x^{n-1}}$

1 Montrer que $\forall x \in]0,1[\ x < \phi(x)$

2 En déduire pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*\ \phi(a+b) < \phi(a) + \phi(b)$

Exercice Facultatiif : 3

Soient n , m et p des entiers na turels tels que $m+1 \leq p$ et $p < n$
On pose $I = \{0, 1, ..., n-1\}$

On considère la suite $(X_p)_{p\in I}$ définie par : $(\forall p \in I)\ X_p = \sum_{k=0}^{p}(C_{n-k}^{m} + C_{n-p}^{m+1})$

1 Etudier la monotonie de $(X_p)_{p\in I}$

2 En déduire que $\sum_{k=0}^{p} C_{n-k}^{m} = C_{n+1}^{m+1} + C_{n-p+1}^{m+1}$

Yassine Elamri