MATHEMATIQUES

⋆⋆⋆ CONTRÔLE N 05 ⋆⋆⋆

- L'homme propose et DIEU dispose -

Ex 1

Les questions de cet exercice sont indépendants

1. On considère les fonctions f et g définies sur $[0,1]$ par $f(x) = 2xln(x+1)$ et $g(x) = ln(x+1)$, (C_f) et (C_g) ses courbe respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ et que $||\vec{i}|| = 2cm$

   (a) Montrer que : $(\forall x \in [0,1])\quad \dfrac{x^2-x}{x+1} = x - 2 + \dfrac{2}{x+1}$, puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2-x}{x+1}dx$ (1.5pt)

   (b) Montrer que : $\begin{cases} f(x) - g(x) \leq 0 & ; 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ f(x) - g(x) \geq 0 & ; \dfrac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ ..... (1pt)

   (c) Calculer la surface du domaine limité par les axes $x = 0$; $x = 1$; $y = 0$ et les courbes (C_f) et (C_g) ..... (1.5pt)

2. Calculer les intégrales suivantes :

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}ln(\sqrt{x}+1)dx$ **(I.P.P)** ..... (1pt)

   (b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+x}dx$ **(à l'aide d'une fonction primitive)** ..... (1pt)

   (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x-1}{x+1}dx$ **(à l'aide d'une fonction primitive)** ..... (1pt)

3. (a) Vérifier que : $(\forall x \in [-1,+\infty[)\ x\sqrt{x+1} = \left(\sqrt{x+1}\right)^3 - \sqrt{x+1}$ ..... (0.5pt)

   (b) Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x+1}dx$ ..... (0.5pt)

Ex 2

Dans un espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(-1,1,1)$; $B(\alpha,2,1)$; $C(1,\alpha+1,1)$ et le vecteur $\vec{u}(-1,0,4)$

1. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ..... (0.5pt)
2. Calculer les distances AB et AC en fonction de α ..... (0.5pt)

   déterminer la valeur de α tel que $AC = AB$ ..... (0.5pt)

3. Déterminer la valeur de α sachant que les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonales (1pt)

   (a) Montrer que : dét$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{u}) = 4(\alpha^2+\alpha-2)$ ..... (1pt)

   (b) Déterminer les valeurs de α sachant que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{u}$ sont coplanaires ..... (0.5pt)

Yassine Elamri

Ex 3

Dans un espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère sphère (S) d'équation cartésienne $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - x + z - 1 = 0$

1. Déterminer le centre et le rayon de sphère (S) ..... (1.5pt)
2. Montrer que l'équation cartésienne du plan (P) passant par le point $A(1, 3, -1)$ et d'un vecteur normal $\vec{n}(2, 0, -2)$ est $(P) : 2x - 2z - 4 = 0$ ..... (1.5pt)
3. (a) Calculer $d(\Omega, (P))$ ..... (1pt)
   (b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) ..... (0.5pt)
   (c) Déterminer une représentation paramétrique d'une droite passante par Ω et orthogonale au plan (P) ..... (1pt)
   (d) En déduire les coordonnées du point H le centre du cercle (C), puis calculer le rayon de (C) ..... (1pt)
4. (a) Montrer que le point $B(1, -1, 0)$ appartient à la sphère (S) ..... (0.5pt)
   (b) Déterminer une équation cartésienne d'une plan (Q) passante par B et tangente à la sphère (S) ..... (1pt)

Ex.F 1

Les questions de cet exercice sont indépendants

1. Calculer les deux limites suivantes :
   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{n}{(n+k)^2}$
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{\dfrac{n-k}{n^3+n^2k}}$
2. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$
   (a) Montrer que $\int_a^b f(a+b-x)dx = \int_a^b f(x)dx$
   (b) En déduire que : $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\cos(t)} - \sqrt{\sin(t)} = 0$
3. On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, et (C_g) sa courbe dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ avec $||\vec{i}|| = 2cm$
   (a) En calculer $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ $\quad (t = x + \sqrt{x^2+1})$
   (b) En déduire la surface limité par la courbe (C_f) et les axes $x = 0$, $x = 1$ et $y = x$

$$e^{i\pi+1} = 0$$

Yassine Elamri