MATHEMATIQUES

⋆⋆⋆ CONTRÔLE N 04 ⋆⋆⋆

- L'homme propose et DIEU dispose -

Ex 1

Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} + x$

(C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ $\left(||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = 1cm\right)$

1. Montrer que la fonction f est impaire ..... (0.75pt)
2. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) = x + 1 - \dfrac{2}{e^{2x}+1}$ ..... (1pt)
3. (a) Calculer : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ..... (0.5pt)
   (b) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ ..... (0.75pt)
   (c) Montrer que la courbe (C_f) au dessous de (Δ) sur $[0, +\infty[$ ..... (0.75pt)
4. (a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \dfrac{f(x)}{x} = 1 + \dfrac{e^x - 1}{x} \times \dfrac{e^x + 1}{e^{2x} + 1}$ ..... (0.5pt)
   (b) En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu ..... (1.25pt)
5. (a) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = 1 + \left(\dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}\right)^2$ ..... (1.25pt)
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction f ..... (0.5pt)
6. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $1 - e^{2x} = 0$ ..... (0.5pt)
   (b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f''(x) = \dfrac{8e^{2x}(1 - e^{2x})}{(e^{2x}+1)^3}$ ..... (1pt)
   (c) En déduire que le point $A(0, 0)$ est un point d'inflexion de $C(C_f)$, puis étudier la concavité de (C_f) ..... (1pt)
7. Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer ..... (0.5pt)
8. Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans le même repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ ..... (1.75pt)

Ex 2

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E) : z^2 - 3\sqrt{3}z + 27 = 0$ ..... (1.25pt)
2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $O, \vec{e_1}, \vec{e_2}$, on considère les points A , B et C d'affixe respective : $a = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{9}{2}i$; $b = 3\sqrt{3}$ et $c = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{9}{2}i$
   (a) Écrire a et c sous forme exponentielle ..... (1.5pt)
   (b) Montrer que le point B est l'image du point A par la rotation R du centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{3}$ ..... (1.5pt)
   (c) Montrer que $\dfrac{c-a}{b-a} \times \dfrac{b+a}{c+a} \in \mathbb{R}$ ..... (0.75pt)

Yassine Elamri

(d) En déduire que les point A ; B ; C et D sont cocyclique avec le point D est le symétrique du point A par rapport à O ..... (0.5pt)

Ex 3

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E_1) : -6z^2 + 12z - 24 = 0$ ..... (0.5pt)
2. Résoudre l'équation différentielle $(E) : -6y'' + 12y' - 24y = 0$ ..... (1pt)
3. Déterminer la solution de l'équation (E) telle que $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ..... (1pt)

Ex.F 1

Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction dérivable
On supposone qu'ile existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout $x \in [a, b]$ on a$|f'(x)| \leq k$

1. On dit que $\gamma \in [a, b]$ est un point fixe de f si $f(\gamma) = \gamma$
   Démontrer que f admet un point fixe
2. Démontrer que ce point fixe est unique, on le note γ
3. Soit $(U_n)_n$ une suite récurrente définie par : $U_0 \in [a, b]$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
   Démontrer que la suite $(U_n)_n$ est convergente vers λ

Ex.F 2

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 & ; x \leq 0 \\ f(x) = e^{-\frac{1}{x}} & ; x > 0 \end{cases}$

1. Montrer que la fonction f est dérivable n fois sur $]0 + \infty[$ et que pour tout $x > 0$
   $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x}} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$
2. Montrer que la fonction f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$

Ex.F 3

Soit $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $[0, 1]$ vérifiant $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$ il existe $0 < x_1 < x_2 < ....x_n < 1$ virifiant $g'(x_1) + g'(x2) + ... + g'(x_n) = n$

Yassine Elamri

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$