Correction

Exercice : 1

1 La proposition A est fausse: car il existe des nombres réels non positif par exemple -1, -15 ...
la proposition B est vraie car $x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$
la proposition C est fausse, en effet Pour $x = 1$ et $y = -3$ on a bien $x^2 + 2x = y^2 + 2y$, mais $1 \neq -3$

2 .

Proposition	Proposition quantifié	Négation de la proposition quantifié
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est croissante	$(\forall x, y \in D_f) : x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$	$(\exists x, y \in D_f) : x \geq y$ ou $f(x) < f(y)$
Il existe un réel x, il existe un entier n tel que $nx^2 + 7n < x$	$(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists n \in \mathbb{N}) : nx^2 + 7n < x$	$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{N}) : nx^2 + 7n \geq x$
Pour tout réel x il existe un unique entier tel que $n \leq x < n+1$	$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists! n \in \mathbb{Z}) : n \leq x < n+1$	$(\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall n \in \mathbb{Z}) : n+1 \leq x < n$
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction constante	$\forall\,(x; y) \in D_f : f(x) = f(y)$	$\exists\,(x; y) \in D_f : f(x) \neq f(y)$
L'équation $3x + 5 = 2x + 7$ admet une seule solution	$(\exists! x_0 \in \mathbb{R}) : 3x + 5 = 2x + 7$	$(\forall x \in \mathbb{R}) : 3x + 5 \neq 2x + 7$
le carré d'un nombre réel est positif	$(\forall x \in \mathbb{R}), x^2 \geq 0$	$(\exists x \in \mathbb{R}), x^2 < 0$

3 **a** Par disjonction des cas montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $n(n+1)$ est un nombre paire.
Soit n dans $\mathbb{N}$.
Pour n paire, alors $(\exists k \in \mathbb{N}) : n = 2k$. En remplaçant n par sont expression en trouve :

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 2\underbrace{k(2k+1)}_{h} \\ &= 2h \qquad (h \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Pour n impaire, alors $(\exists k \in \mathbb{N}) : n = 2k+1$. En remplaçant n par sont expression en trouve :

$$\begin{aligned} n(n+1) &= (2k+1)(2k+1+1) \\ &= 2\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{h} \\ &= 2h \qquad (h \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Ainsi dans les deux cas on a pour tout n dans $\mathbb{N}$ $n(c+1)$ est un nombre paire.

b Par récurrence, montrons que pour tout n dans $\mathbb{N}$ $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Initialisation : Pour $n = 0$ on a bien $0 = \dfrac{0(0+1)}{2}$

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$

Yassine Elamri

Supposons que $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ et montrons que $1+2+3+...+n+n+1=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

on a

$$\begin{aligned}1+2+3+...+n+n+1 &= \underbrace{1+2+3+...+n}+n+1\\ &= \frac{n(n+1)}{2}+n+1\\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned}$$

Conclusion : Pour tout n dans $\mathbb{N}$ on a $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

c D'après ce précède on a :

$$\begin{aligned}1+2+3+...+100 &= \frac{100(100+1)}{2}\\ &= \frac{100\times 101}{2}\\ &= 5050\end{aligned}$$

4 a .

p	q	$p \Longrightarrow q$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

b La proposition $p \Longrightarrow q$ est fausse si p vraie et q fausse.

c la proposition "n entier naturel paire" est vraie.

$$\begin{aligned}n \text{ paire} &\Longrightarrow (\exists K\in\mathbb{N}) : n=2K\\ &\Longrightarrow (\exists K\in\mathbb{N}) : n(n+1)(n+2)=2K(2K+1)(2K+2)\\ &\Longrightarrow (\exists K\in\mathbb{N}) : n(n+1)(n+2)=4\underbrace{K(K+1)}_{2h}(2K+1) \qquad (h\in\mathbb{N})\\ &\Longrightarrow (\exists h,K\in\mathbb{N}) : n(n+1)(n+2)=8h(2K+1)\\ &\Longrightarrow 8 \text{ divise } n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Ainsi la proposition "n entier naturel paire $\Longrightarrow n(n+1)(n+2)$ est divisible par 8" est vraie.

5 Soit x un élément dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}3yx^2+x=7-y &\Longrightarrow y\left(3x^2+1\right)=7-x\\ &\Longrightarrow y=\frac{7-x}{3x^2+1} \qquad \left(\forall x\in\mathbb{R}, 3x^2+1\neq 0\right)\end{aligned}$$

Yassine Elamri

Donc il existe $y = \dfrac{7-x}{3x^2+1}$.
D'où $(\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) : 3yx^2 + x = 7 - y$

6 Il est équivalent de montrer que que $\left(\forall (x;y) \in]1;+\infty[^2\right) : \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{y+1}{y-1} \Longrightarrow x = y$.
Soit $x, y \in]1;+\infty[$

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{x-1} = \frac{y+1}{y-1} &\Longrightarrow (x+1)(y-1) = (y+1)(x-1)\\ &\Longrightarrow xy - x + y - 1 = xy - y + x - 1\\ &\Longrightarrow 2x = 2y\\ &\Longrightarrow x = y\end{aligned}$$

7 Par l'absurde montrons que $\sqrt{\dfrac{5}{2}} \notin \mathbb{Q}$.
$\sqrt{\dfrac{5}{2}} \in \mathbb{Q}$ implique qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : \sqrt{\dfrac{5}{2}} = \dfrac{a}{b}$ et $a \wedge b = 1$.

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{a}{b} &\Longrightarrow \frac{5}{2} = \frac{a^2}{b^2}\\ &\Longrightarrow 5b^2 = 2a^2 \qquad (1)\\ &\Longrightarrow 5b^2 \text{ paire}\\ &\Longrightarrow b^2 \text{ paire}\\ &\Longrightarrow b \text{ paire}\\ &\Longrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) : b = 2k \qquad (2)\end{aligned}$$

De (1) et (2) on a $5\,(2k)^2 = 2a^2$, ce qui implique que $a^2 = 10k^2$
Donc a^2 est paire, par suite a est paire.
Ainsi a et b sont paire, ce qui implique $a \wedge b \geq 2$
Ce contredit à $a \wedge b = 1$.
En conclusion $\sqrt{\dfrac{5}{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice : 2

1

$$f(x) = x|x| - 2x \Longrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 - 2x & ; si\ x \in [0;+\infty[\\ f(x) = -x^2 - 2x & ; si\ x \in]-\infty;0] \end{cases}$$
$$\Longrightarrow D_f = \mathbb{R}$$

2 On a $D_f = \mathbb{R}$, donc $\forall x \in D_f$ on a $-x \in D_f$.
Soit $x \in D_f$

$$\begin{aligned}f(-x) &= -x|-x| - 2(-x)\\ &= -x|x| + 2x\\ &= -(x|x| - 2x)\\ &= -f(x)\end{aligned}$$

Yassine Elamri

D'où f est une fonction impaire.

3 Soit $x \in [0;+\infty[$

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= x^2 - 2x - (1-2) \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x+1)^2 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi $f(1) = -1$ est une valeur minimale de f sur $[0;+\infty[$.

4 Soit $x \in]-\infty;0[$

$$\begin{aligned} f(x) - f(-1) &= -x^2 - 2x - (-1+2) \\ &= -x^2 - 2x - 1 \\ &= -(x+1)^2 > 0 \end{aligned}$$

Ainsi $f(-1) = 1$ est une valeur maximale de f sur $]-\infty;0[$. la courbe de f est symétrie par rapport à l'origine du repère. Comme f admet un minimum en en 1, alors $f(-1)$ est une valeur maximale de f sur sur $]-\infty;0]$.

5 a Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$.
si $x, y \in [0;+\infty[$

$$\begin{aligned} T(x;y) &= \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \\ &= \frac{x^2 - 2x - y^2 + 2y}{x-y} \\ &= x + y - 2 \end{aligned}$$

si $x, y \in]-\infty;0]$

$$\begin{aligned} T(x;y) &= \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \\ &= \frac{-x^2 - 2x + y^2 + 2y}{x-y} \\ &= 2 - x - y \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{cases} T(x;y) = x + y - 2 \; ; \forall (x;y) \in [0;+\infty[^2 \\ T(x;y) = 2 - x - y \; ; \forall (x;y) \in]-\infty;0]^2 \end{cases}$$

b On a

$$\begin{cases} T(x;y) \geq 0 \; ; \forall (x;y) \in [1;+\infty[^2 \\ T(x;y) \leq 0 \; ; \forall (x;y) \in [0;1]^2 \end{cases}$$

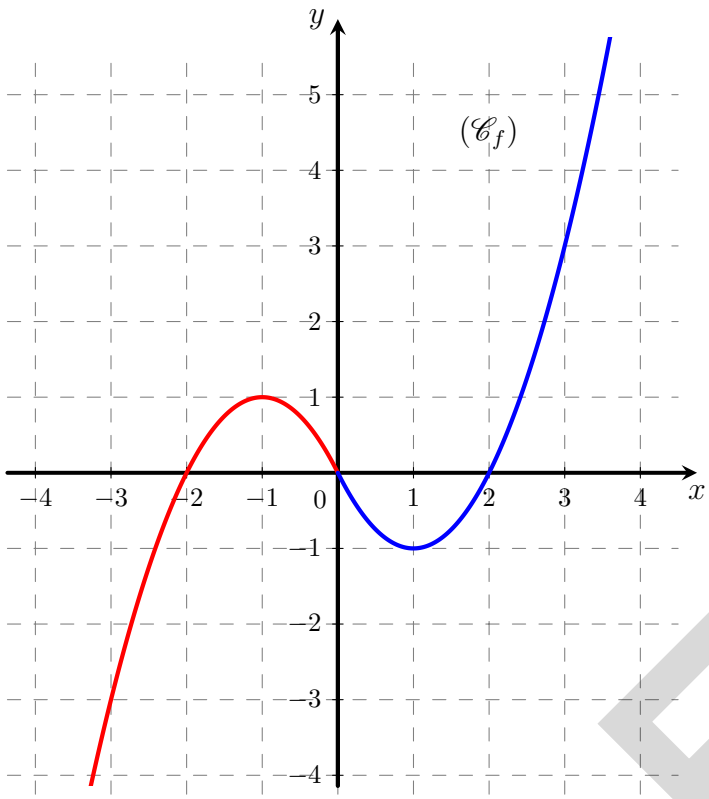
D'où f croissante sur $[1;+\infty[$ et décroissante sur $[0;1]$.

c .

x	0		1		∞
$f(x)$	0	↘	-1	↗	∞

Yassine Elamri

d .



Exercice : 3

1 D'après la figure on a $D_f = [-3; 6]$

2 .

Intervalle	Valeur maximale de f	Valeur minimale de f
$[-3; 6]$	$f(3) = 3$	$f(-3) = -3$
$[-2; 2]$	$f(-1) = 1$	$f(1) = -1$

3 .

inéquation	Solutions	Interprétation géométrique
$g(x) < f(x)$	$]-0,8; 3[$	$(\mathscr{C}_g)$ au-dessous de $(\mathscr{C}_f)$
$f(x) \leq g(x)$	$[-3; -0,8] \cup [3; 6]$	$(\mathscr{C}_g)$ au-dessus de $(\mathscr{C}_f)$
$f(x) < 0$	$[-3; -2[\cup]0; 2[$	$(\mathscr{C}_f)$ au-dessous de l'axe des abscisse
$g(x) \leq 1$	$\left[-0,8; \frac{8}{3}\right] \cup [4; 6]$	$(\mathscr{C}_g)$ au-dessous de la droite d'équation $y = 1$

4 D'après la figure on a :

$f(x) - 1 = 0 \Longleftrightarrow x \in \{-0,8; \frac{7}{3}; 4\}$

$g(x) = f(x) \Longleftrightarrow x \in \{-0,8; 3\}$

5 .

Yassine Elamri

x	-3		-1		1		3		6
$f(x)$	-3	↗	1	↘	-1	↗	3	↘	0

6 D'après la figure on a $f([-3;6]) = [-3;3]$ et $g([0;3]) = [-3;3]$.

Yassine Elamri