AREF : SOUS MASSA **Direction : TATA** **Lycée : ELMANSOUR DAHBI** **Pr :** https://steinmath.com **Niveau : 2BSM(biof)**	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني	**Matière : Mathématique** **Semestre : 01** **Année scolaire : 2020/2021** **Durée : 2H** **Le :**
	Contrôle N° 01	

Barème	Contenue
(6pts)	**Exercices 01**
3pts	1- Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[2\arctan(x)-\pi\right]$; $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\arctan\left(\sqrt{1-x^2}\right)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x\sqrt[3]{a}-a\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[4]{x}-a\sqrt[4]{a}}$ $/\,a>0$
1.5pt	2- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}}}$ Montrer que f admet un prolongement par continuité au point $x_0=1$, puis donner ce prolongement
1 pt	3- Montrer l'égalité suivante : $(\forall x\in\mathbb{R})\ \cos(\arctan x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
0.5pt	4- Soit f la fonction numérique continue sur $[0,2]$ Montrer que $\exists c\in\,]0:2[\ /\ f(c)=\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{c-2}$
(6.5pts)	**Exercices 02**
	Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\begin{cases} g(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x}\right)\right) & ,\ x>0 \\ g(0)=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$
0.75 pt	1- Étudier la continuité de g sur $\mathbb{R}^+$
1 pt	2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
1.25 pt	3- $a-$ vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\left(\exists!\alpha\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)\ x=\tan^3(\alpha)$
1.25 pt	$b-$ En déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R}^+)\ \ g(x)=\dfrac{\pi}{2}-2\arctan\left(\sqrt[3]{x}\right)$
1.25 pt	4- Montrer que la fonction g réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur un intervalle J à déterminer.
1 pt	5- Déterminer $g^{-1}(x)$ $\forall x\in J$.
(6 pts)	**Exercices 03**
	Soit $n\in\mathbb{N}^*$ on considère la foction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f_n(x)=x^{n+1}+x^n+3x-2$
0.5 pt	1- Étudier la monotonie de f_n
1.25 pt	2- Montrer que l' équation $f_n(x)=0$ admet une solution unique φ_n dans $\mathbb{R}^+$
0.25 pt	3- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \varphi_n<\dfrac{2}{3}$
0.75 pt	4- $a-$ Étudier le singe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$
1 pt	$b-$ Montrer que la suite $(\varphi_n)_n$ est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente

Yassine Elamri

1 pt

5- $a-$ Verifier que $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)\ \varphi_n=\dfrac{2-\varphi_n^n}{3+\varphi_n^n}$

0.75 pt

$b-$ En déduire que : $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)=\dfrac{2-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{3+\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}\le\varphi_n<\dfrac{2}{3}$

0. 5 pt

$c-$ Calculer $\lim\varphi_n$

(1.5pts)

Exercices 04

1- Soit $\left(U_n\right)$ et $\left(V_n\right)$ les deux suites définies pour tout $n\ge1$ par :

$U_n=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}$ et $V_n=U_n+\dfrac{1}{n}$

Montrer que le deux suites $\left(U_n\right)$ et $\left(V_n\right)$ sont adjacentes

1 pt

+- Exercices facultatif +-

Soit h une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, et telle que : $f(0)=f(1)$

1- Montrer que pour tout entier naturel n non nul, il existe $c_n\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que :

$h\left(c_n\right)=h\left(c_n+\dfrac{1}{n}\right)$

2- Montrer que si l'on remplace $\dfrac{1}{n}$ par un réel $\beta\in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{\beta}$ n'est pas un entier, le résultat précédent n'est plus vrai. On pourra considérer la fonction g définie sur $[0,1]$ par :

$g(x)=\cos\left(\dfrac{2\pi x}{\beta}\right)-x\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{\beta}\right)-1\right)$

L'homme propose et DIEU dispose

Yassine Elamri