ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Économiques

Session : Rattrapage juillet 2012

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Économiques**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **2 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Calcul intégral** ..... **2.5 points**
- Exercice 2 : **Suites numériques** ..... **4.5 points**
- Exercice 3 : **Étude dune fonction numérique** ..... **9 points**
- Exercice 4 : **Calcul des probabilités** ..... **4 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (2.5 pts)

0.5 pt **1 -** Vérifier que la fonction $F : x \mapsto x\ln(x) - x$ est une fonction primitive de la fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

0.5 pt **2 -** En déduire la valeur de l'intégrale $\int_1^e \ln(x)\ dx$.

1.5 pt **3 -** En utilisant une intégration par parties, calculer l'intégrale $\int_1^e \left(\ln\left(x\right)\right)^2\ dx$.

Exercice 2 : (4.5 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **1 -** Montrer par récurrence que $u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n-1)^2}{2-u_n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et convergente.

3 - On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1 pt **a)** Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

0.5 pt **b)** Montrer que $u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.75 pt **c)** Exprimer v_n en fonction de n puis en déduire que $u_n = \dfrac{n}{n+1}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

0.5 pt **d)** Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3 : (9 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 1$

Et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.75 pt **1 -** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

1.5 pt **2 -** Vérifier que $f(x) = e^x\left(3e^x - 4 + \dfrac{1}{e^x}\right)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que $f'(x) = 2e^x(3e^x - 2)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1.25 pt **b)** Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$ et vérifier que $f\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right)\right) = -\dfrac{1}{3}$ puis dresser le tableau de variations de f.

0.5 pt **4 - a)** Vérifier que $f(x) = (3e^x - 1)(e^x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

1 pt **b)** En déduire que la courbe (C) coupe l'axe des abscisses en O et $I(-\ln(3);0)$.

1.25 pt **c)** Montrer que $f''(x) = 4e^x(3e^x - 1)$ pour tout x de $\mathbb{R}$ et étudier le signe de $f''(x)$ puis en déduire que I est point d'inflexion de la courbe (C).

2.25 pt **d)** Calculer $f'(0)$ et $f'(-\ln(3))$ puis construire I et $B\left(\ln\left(\dfrac{2}{3}\right);-\dfrac{1}{3}\right)$ et les tangentes à la courbe (C) au points O, I et B, puis tracer la courbe (C)

(on prend $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2cm$ et $\ln(2) \approx 0.7$ et $\ln(3) \approx 1.1$)

Yassine Elamri

Exercice 4 : (4 pts)

Donner les résultats sous forme de fraction

Une urne contient douze boules indiscernables au toucher, cinq boules rouges, quatre boules blanches et trois boules vertes.

On tire au hasard, simultanément, trois boules de l'urne.

1 - On considère les deux événements suivants :

A : "Les boules tirées sont de même couleur"

B : "Parmi les boules tirées il y a au moins une boule verte "

0.5 pt **a)** Montrer que la probabilité de A est $p(A) = \frac{3}{44}$.

1.25 pt **b)** Calculer $p\left(\overline{B}\right)$ (où $\overline{B}$ est l'événement contraire de l'événement B) puis en déduire $p(B)$.

2 - Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules vertes tirées.

0.25 pt **a)** Montrer que les valeurs prises par X sont $0, 1, 2$ et 3.

2 pt **b)** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

FIN

Yassine Elamri