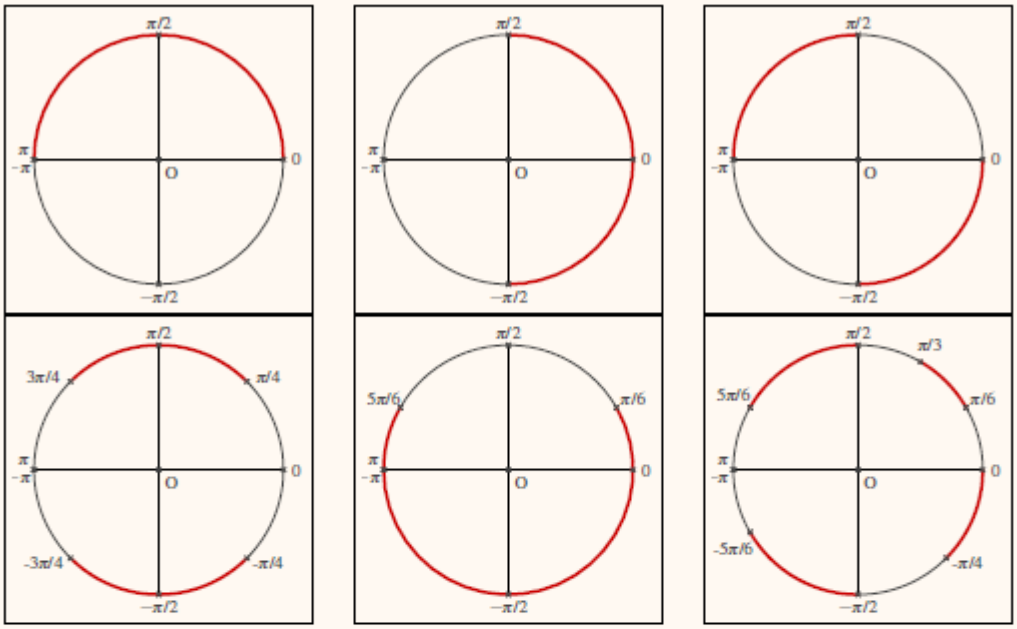


1 Ecrire les réunions dintervalles de $[0;2\pi]$ qui représentent les parties du cercle trigonométrique dans les figures au-dessus.

2 Ecrire les réunions dintervalles dans $\mathbb{R}$ qui représentent les parties du cercle trigonométrique dans les figures au-dessus.

Définition

Soit a un réel.

Les équations $\sin(x) = a$; $\cos(x) = a$ et $\tan(x) = a$ sont appelées **équations trigonométriques**.

Activité

(Equations et inéquations)

Soit $L =]-\pi;\pi]$, $x \in L$ et $y \in L$.

1 Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisse curviligne x tel que : $\cos x = \frac{1}{2}$.

2 Soit (Δ_1) une droite d'équation $(\Delta_1) : x = \frac{1}{2}$.

a Déterminer l'intersection de (Δ_1) et (C)

b Les points de (C) qui situent à gauche de (Δ_1). Qui ce qu'ils représentent ?.

c Les points de (C) qui situent à droite de (Δ_1). Qui ce qu'ils représentent ?.

3 Représenter, sur le cercle trigonométrique, les points d'abscisse curviligne y tel que : $\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 Soit (Δ_2) une droite d'équation $(\Delta_2) : y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

a Déterminer l'intersection de (Δ_2) et (C)

b Les points de (C) qui situent à gauche de (Δ_2). Qui ce qu'ils représentent ?.

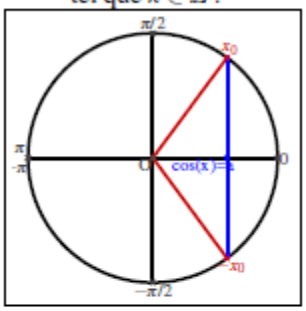
c Les points de (C) qui situent à droite de (Δ_2). Qui ce qu'ils représentent ?.

1 Equation de la forme $\cos x = a$

Propriété

Soit a un réel, et soit S l'ensemble des solutions de l'équation : $(E) : \cos x = a$.

- Si $|a| > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions, donc $S = \emptyset$.
- Si $|a| < 1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a = \cos x_0$, alors l'équation (E) sera $(E) : \cos x = \cos x_0$ et lensemble de solutions est : $S = \{-x_0 + 2k\pi\} \cup \{x_0 + 2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.



- Si $a = -1$ alors lensemble de solutions est : $S = \{\pi + 2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 1$ alors lensemble de solutions est : $S = \{2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

Exemples

- On a : $-1 \leq \cos x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cest-à-dire que : $|\cos x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Donc léquation $\cos x = a$ na de solution que si $|a| > 1$.

- Si $|a|<1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a=\cos x_0$:
  - $\cos(x)=\cos(x_0)=\cos(x_0+2k\pi)$ car $\cos(x_0+2k\pi)=\cos(x_0)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

  Donc $x=x_0+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.
  - $\cos(x)=\cos(x_0)=\cos(-x_0)=\cos(-x_0+2k\pi)$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, car $\cos(-x_0)=\cos(x_0)$

  .

  Donc $x=-x_0+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.
- Si $a=-1$ alors $\cos(x)=\cos(\pi)$ car $\cos(\pi)=-1$. Donc $x=\pi+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.
- Si $a=1$ alors $\cos(x)=\cos(0)$ car $\cos(0)=1$. Donc $x=0+2k\pi=2k\pi/k\in\mathbb{Z}$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ léquation (E_1) : $\cos x=\frac{1}{2}$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$; alors lensemble des solutions de léquation (E_1) dans $\mathbb{R}$ est :

$x=\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ou bien $x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$. Doù $S_1=\left\{-\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\right\}$ tel que $k\in\mathbb{Z}$.

Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation (E_2) : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$; alors lensemble des solutions de léquation (E_2) dans $\mathbb{R}$ est :

$x=\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$ ou bien $x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi/k\in\mathbb{Z}$. Doù $S'=\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi\right\}$ tel que $k\in\mathbb{Z}$.

- Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il suffit de trouver les valeurs de k et k' telles que : $-\pi<-\frac{\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$ et $-\pi<\frac{\pi}{6}+2k'\pi\leq\pi$

Signifie que : $-1<-\frac{1}{6}+2k\leq 1$ et $-1<\frac{1}{6}+2k'\leq 1$

Signifie que : $-\frac{5}{12}<k\leq\frac{7}{12}$ Donc $k=0$ et $-\frac{7}{12}<k\leq\frac{5}{12}$ Donc $k'=0$

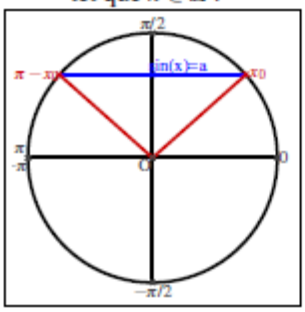
Donc $x_1=-\frac{\pi}{6}$ et $x_2=\frac{\pi}{6}$. Doù l'ensemble des solutions est : $S_2=\left\{-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right\}$.

2 Equation de la forme $\sin x = a$

Propriété

Soit a un réel, et soit S l'ensemble des solutions de l'équation : (E) : $\sin x = a$.

- Si $|a| > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de solutions, donc $S = \emptyset$.
- Si $|a| < 1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a = \sin x_0$, alors l'équation (E) sera (E) : $\sin x = \sin x_0$ et lensemble de solutions est : $S = \{x_0 + 2k\pi\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = -1$ alors lensemble de solutions est : $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 1$ alors lensemble de solutions est : $S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.



Exemples

- On a : $-1 \leq \sin x \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, cest-à-dire que : $|\sin x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Donc léquation $\sin x = a$ na de solution que si $|a| > 1$.
- Si $|a| < 1$ alors il existe un nombre réel $x_0 \in]-\pi;\pi]$ tel que : $a = \sin x_0$:
  - $\sin(x) = \sin(x_0) = \sin(x_0 + 2k\pi)$ car $\sin(x_0 + 2k\pi) = \sin(x_0)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
    Donc $x = x_0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.
  - $\sin(x) = \sin(x_0) = \sin(\pi - x_0) = \sin(\pi - x_0 + 2k\pi)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, car $\sin(\pi - x_0) = \sin(x_0)$
    Donc $x = \pi - x_0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$
- Si $a = -1$ alors $\sin(x) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ car $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. Donc $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.
- Si $a = 1$ alors $\sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ car $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Donc $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ léquation (E_1) : $\sin x = \sqrt{2}$.

Comme $\sqrt{2} > 1$; alors léquation (E_1) n'admet pas de solutions. Donc $S_1 = \emptyset$.

Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation (E_2) : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

On sait que $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$; alors lensemble des solutions de léquation léquation (E_2) dans $\mathbb{R}$ est :

$x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$ ou bien $x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$. Doù $S' = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

- Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\sin x = -\frac{1}{2}$.

Il suffit de trouver les valeurs de k et k' telles que : $-\pi < -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi$ et $-\pi < 7\frac{\pi}{6} + 2k'\pi \leq \pi$

Signifie que : $-1 < -\frac{1}{6} + 2k \leq 1$ et $-1 < \frac{7}{6} + 2k' \leq 1$

Signifie que : $-\frac{5}{12} < k \leq \frac{7}{12}$ Donc $k = 0$ et $-\frac{13}{12} < k \leq -\frac{1}{12}$ Donc $k' = -1$

Donc $x_1 = -\frac{\pi}{6}$ et $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$. Doù l'ensemble des solutions est : $S_2 = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right\}$.

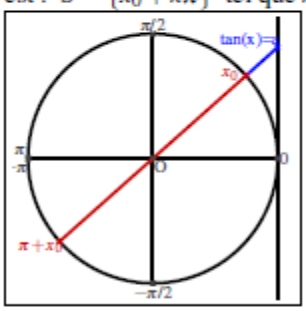
3 Equation de la forme $\tan x = a$

Propriété

Soit a un réel, et soit S l'ensemble des solutions de l'équation :

(E) : $\tan x = a$.

Il existe un nombre réel $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $a = \tan x_0$, alors l'équation (E) sera (E) : $\tan x = \tan x_0$ et lensemble de solutions est : $S = \{x_0 + k\pi\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.



• Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ léquation (E_1) : $\tan x = -1$.

Léquation (E_1) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

On a $\tan x = -1$; signifie que $\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$. Donc $\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; c'est-à-dire $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Comme $-\frac{\pi}{4} + k\pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$ où $k, k' \in \mathbb{Z}$. Alors $S_1 = \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\right\} / k \in \mathbb{Z}$.

• Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\tan x = \sqrt{3}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation (E_2) : $\tan x = \sqrt{3}$.

Léquation (E_2) est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$.

Alors $\tan x = \sqrt{3}$; équivaut à $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$. Donc $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right)$; c'est-à-dire $x = \frac{\pi}{3} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$

.

Comme $\frac{\pi}{3} + k\pi \neq \frac{\pi}{2} + k'\pi$ où $k, k' \in \mathbb{Z}$. Alors $S' = \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi\right\} / k \in \mathbb{Z}$.

- Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\tan x = \sqrt{3}$.

Il suffit de trouver les valeurs de k telle que : $-\pi < \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi$ Signifie que : $-1 < \frac{1}{3} + k \leq 1$

Signifie que : $-\frac{4}{3} < k \leq \frac{2}{3}$ Donc $k = -1; 0$

Donc $x_1 = -\frac{2\pi}{3}$ et $x_2 = \frac{\pi}{3}$. Doù l'ensemble des solutions est : $S_2 = \left\{-\frac{2\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}\right\}$.

III Inéquations trigonométriques fondamentales

Définition

Soit a un réel.

Les inéquations $\sin(x) \geq a$; $\cos(x) \geq a$ et $\tan(x) \geq a$ sont appelées **inéquations trigonométriques.**

De même si on a l'un des symboles $>$; $<$ et $\leq$ au lieu de $\geq$.

Théorème

Soit a un réel, Si $a > 1$ alors :

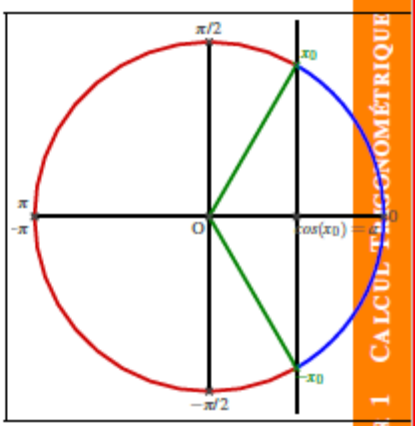
- Les inéquations $\sin(x) \geq a$; $\cos(x) \geq a$; $\sin(x) > a$ et $\cos(x) > a$ n'ont pas de solutions .
- L'ensemble des solutions des inéquations $\sin(x) \leq a$; $\cos(x) \leq a$; $\sin(x) < a$ et $\cos(x) < a$ est $\mathbb{R}$

Si $a < 1$ alors :

- Les inéquations $\sin(x) \leq a$; $\cos(x) \leq a$; $\sin(x) < a$ et $\cos(x) < a$ n'ont pas de solutions .
- L'ensemble des solutions des inéquations $\sin(x) \geq a$; $\cos(x) \geq a$; $\sin(x) > a$ et $\cos(x) > a$ est $\mathbb{R}$

1 Inéquation de la forme $\cos x \geq a$ ou $\cos x \leq a$

Soit a un réel.



- Si $a = 1$ alors :
  - Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \geq 1$ est $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
  - linéquation $\cos x > 1$ n'a pas de solutions.
  - Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \leq 1$ est $S = \mathbb{R}$
  - Lensemble des solutions de linéquation $\cos x < 1$ est $S = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
- Si $a = -1$ alors :
  - Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \geq -1$ est $S = \mathbb{R}$.
  - Lensemble des solutions de linéquation $\cos x > -1$ est $S = \mathbb{R} \setminus \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
  - Lensemble des solutions de linéquation $\cos x \leq -1$ est $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
  - linéquation $\cos x < -1$ n'a pas de solutions.
- Si $|a| < 1$ alors il existe un réel $x_0 \in]-\pi ; \pi]$ tel que : $\cos x_0 = a$ (on utilise le cercle trigonométrique).
  - $\cos x \geq \cos x_0$ si et seulement si $-x_0 + 2k\pi \leq x \leq x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
  - $\cos x > \cos x_0$ si et seulement si $-x_0 + 2k\pi < x < x_0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

- $\cos x \leq \cos x_0$ si et seulement si $x \in]-\pi+2k\pi;-x_0+2k\pi] \cup [x_0+2k\pi;\pi+2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos x < \cos x_0$ si et seulement si $x \in]-\pi+2k\pi;-x_0+2k\pi[\cup]x_0+2k\pi;\pi+2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Exemple

Résolvons dans $\mathbb{R}$ linéquation (I_1) : $\cos x \leq -\sqrt{3}$.

Comme $-\sqrt{3} < -1$; alors linéquation (I_1) n'admet pas de solutions, dons $S_1 = \emptyset$.

Exemple

Résolvons sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ linéquation (I_2) : $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

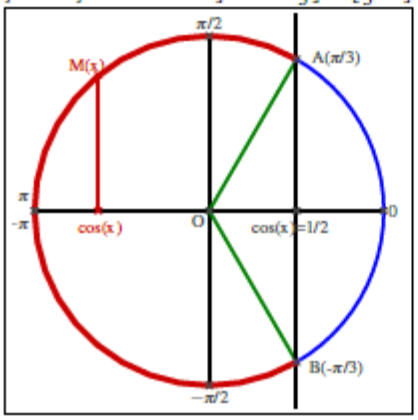
- On résout d'abord dans $]-\pi;\pi]$ léquation (E_2) : $\cos x = \frac{1}{2}$.

On sait que $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; alors $S' = \left\{-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$.

- Sur le cercle trigonométrique, on considère les deux points $A\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $B\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Notons quen se référant à la figure ci-contre, lensemble des solutions est lensemble des abscisses curvilignes des points $M(x)$ représentés sur larc rouge du cercle trigonométrique (C) tel que $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

Donc lensemble des solutions de linéquation (I_2) sur l'intervalle $]-\pi;\pi]$ est : $S_2 =]-\pi;-\frac{\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{3};\pi]$.

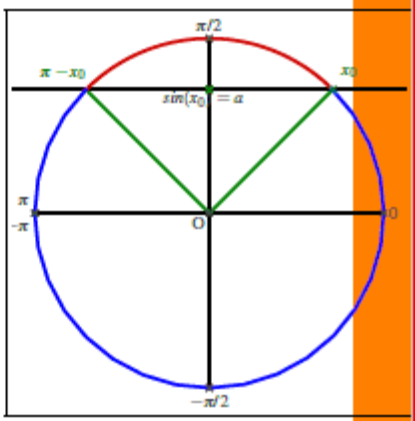


2 Inéquation de la forme $\sin x \geq a$ ou $\sin x \leq a$

Soit a un réel.

► Si $a = 1$ alors :

- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \geq 1$ est
$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
- linéquation $\sin x > 1$ n'a pas de solutions.
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \leq 1$ est $S = \mathbb{R}$
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x < 1$ est
$$S = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$



► Si $a = -1$ alors :

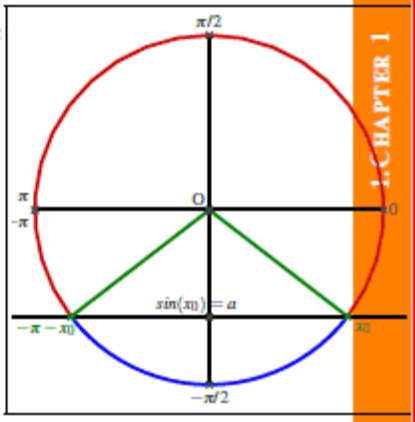
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \geq -1$ est $S = \mathbb{R}$.
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x > -1$ est
$$S = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
- Lensemble des solutions de linéquation $\sin x \leq -1$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- linéquation $\sin x < -1$ n'a pas de solutions.

► Si $0 \leq a < 1$ alors il existe un réel $x_0 \in [0;\pi]$ tel que : $\sin x_0 = a$ (on utilise le cercle trigonométrique).

- $\sin x \geq \sin x_0$ alors $S = [x_0 + 2k\pi; \pi - x_0 + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x > \sin x_0$ alors $S =]x_0 + 2k\pi; \pi - x_0 + 2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x \leq \sin x_0$ alors $S = [0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi] \cup [\pi - x_0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x < \sin x_0$ alors $S = [0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi[\cup]\pi - x_0 + 2k\pi; \pi + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

► Si $-1 < a \leq 0$ alors il existe un réel $x_0 \in]-\pi;0]$ tel que : $\sin x_0 = a$ (on utilise le cercle trigonométrique).

- $\sin x \geq \sin x_0$ alors, pour $k \in \mathbb{Z}$
$$S =]-\pi + 2k\pi; -\pi - x_0 + 2k\pi] \cup [x_0 + 2k\pi; 0 + 2k\pi].$$
- $\sin x > \sin x_0$ alors, pour $k \in \mathbb{Z}$
$$S =]-\pi + 2k\pi; -\pi - x_0 + 2k\pi[\cup]x_0 + 2k\pi; 0 + 2k\pi].$$
- $\sin x \leq \sin x_0$ alors $S = [-\pi - x_0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi]$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\sin x < \sin x_0$ alors $S =]-\pi - x_0 + 2k\pi; x_0 + 2k\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



Exemple

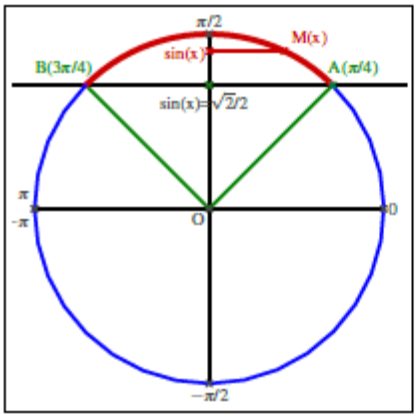
Résolvons dans $\mathbb{R}$ linéquation (I) : $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

- On résout d'abord dans $\mathbb{R}$ léquation (E) : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On sait que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; alors $S' = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right\}$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

- Sur le cercle trigonométrique, on considère les deux points $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $B\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.

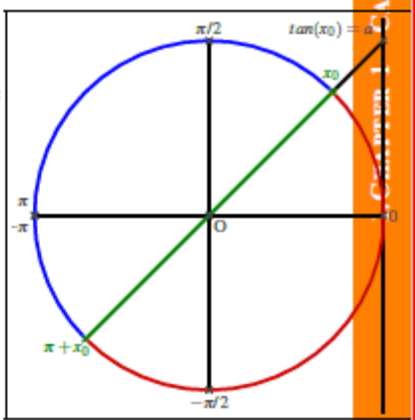
Notons quen se référant à la figure ci-contre, lensemble des solutions est lensemble des abscisses curvilignes des points $M(x)$ représentés sur larc rouge du cercle trigonométrique (C) tel que $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.



Donc lensemble des solutions est : $S = \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi ; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right]$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

3 Inéquation de la forme $\tan x \geq a$ ou $\tan x \leq a$

Soit a un réel, il existe un réel x_0 tel que : $\tan x_0 = a$ et $x_0 \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.



- $\tan x \geq \tan x_0$ si et seulement si $x_0 + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x > \tan x_0$ si et seulement si $x_0 + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x \leq \tan x_0$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq x_0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan x < \tan x_0$ si et seulement si $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < x_0 + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Activité

(Angles Inscrits)

Soient (C) un cercle du centre O, A et B deux points distincts de (C) tels que le segment $[AB] < \Phi$ (avec Φ le diamètre du cercle (C)).

Soit M un point du cercle (C) tel que les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AMB}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.

1 Montrer que : $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ dans les cas suivants :

a Les points A , O et M sont alignés.

b Les points A , O et M ne sont pas alignés (on considère N de (C) tel que N , O et M sont alignés).

2 Soit (AT) la tangente du cercle (C), les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BAT}$ interceptent le même arc $\overset{\frown}{AB}$.
Montrer que : $\widehat{AOB} = 2\widehat{BAT}$.

IV Les angles inscrits - les quadrilatères inscriptibles

1 Angle inscrit - Angles au centre

Définition

- Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle.
- Un angle inscrit est un angle dont le sommet est sur le cercle et les côtés de langle coupent le cercle.

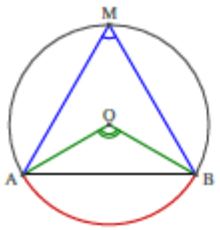
Exemple

Soit (C) un cercle de centre O, $\overset{\frown}{AB}$ un arc de (C) tel que $[AB]$ nest pas le diamètre de (C) .

Langle $\widehat{AMB}$ intercepte larc $\overset{\frown}{AB}$ avec $\widehat{AMB}$ est un angle inscrit.

Langle $\widehat{AOB}$ est un angle au centre intercepte larc $\overset{\frown}{AB}$.

Alors $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$



Activité

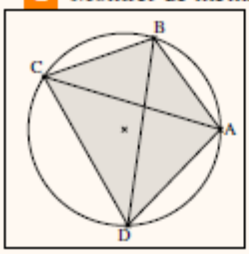
(Quadrilatère Inscriptibles)

Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible (cest-à-dire inscrit dans le cercle (C)).

1 a Montrer que : $\hat{A} = \widehat{DAC} + \widehat{BDC}$ et $\hat{C} = \widehat{DCA} + \widehat{ADB}$.

b En déduire que : $\hat{A} + \hat{C} = \pi$ et $\sin\hat{A} = \sin\hat{C}$.

2 Montrer de même que : $\hat{B} + \hat{D} = \pi$ et $\sin\hat{B} = \sin\hat{D}$.



2 Propriétés

Propriété

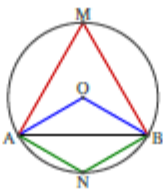
- La mesure de langle inscrit est la moitié de celle de langle au centre qui intercepte le même arc.
- Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure ou ils sont supplémentaires.

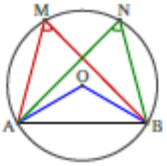
Exemple

$\widehat{ANB} + \widehat{AMB} = \pi$

Donc $\widehat{ANB} = \pi - \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

$\widehat{ANB} = \widehat{AMB}$

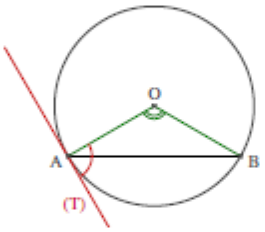




Propriété

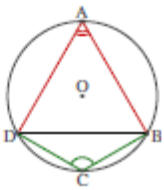
Si la droite (AT) est la tangente du cercle (C) en A, alors :

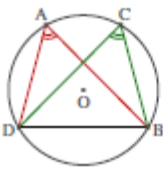
$$\widehat{AOB} = 2.\widehat{BAT}$$



Propriété

- Un quadrilatère est inscriptible si et seulement si deux angles opposés sont égaux ou supplémentaires.
- ABC est un triangle inscrit dans le cercle (C) et D un point dans le plan.





Le point D appartient au cercle (C) si et seulement si $\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$ ou $\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$

3 Les relations trigonométriques dans un triangle

Activité

(Relations trigonométriques)

Soit ABC un triangle, on pose $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$.

1 Montrer que si ABC est un triangle rectangle en A , alors : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$

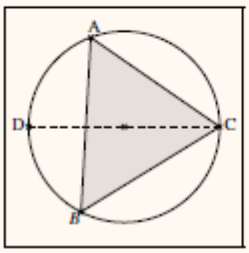
2 On suppose, à présent, que tous les angles de ABC sont aigus.

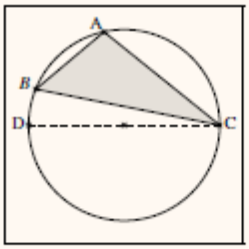
Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC, et D le point de (C) diamétralement opposé à C (voir figure).

a Montrer que : $\sin\hat{A} = \sin\widehat{BDC}$ et $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{a}{DC}$.

b Soit R le rayon du cercle (C). Déduire que : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = 2R$.

c Montrer la relation : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$.





3 On suppose, maintenant, que lun des angles du triangle ABC est obtus, soit $\hat{A}$ cet angle.

a En utilisant les résultats de lactivité précédente, montrer que : $\sin\widehat{BDC} = \dfrac{a}{DC}$ (où D est le point de (C) diamétralement opposé à C).

b Montrer la relation : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = 2R$.

Activité

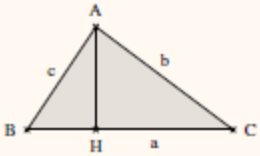
(Relations trigonométriques)

ABC est un triangle tel que $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et S est laire du triangle ABC.

1 On suppose que les angles de ABC sont aigus. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

a Montrer que : $AH = \dfrac{2S}{a} = b\sin\hat{C}$

En déduire que : $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\hat{C}$.



b De même, montrer que :
$S = \dfrac{1}{2}bc\sin\hat{A}$ et $S = \dfrac{1}{2}ac\sin\hat{B}$.

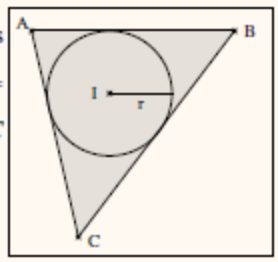
c Si R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, déduire que : $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}} = \dfrac{abc}{2S}$ et $abc = 4R$.

2 Etudier les questions précédentes dans le cas où ABC est un triangle rectangle en C, puis dans le cas où langle $\hat{A}$ est obtus.

Activité

(Relations trigonométriques)

Soient ABC un triangle, I et r sont le centre et le rayon respectifs de son cercle inscrit. Soit S laire du triangle ABC. On pose : $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. Soit p le demi-périmètre du triangle ABC $\left(p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.
Montrer que : $S = pr$.



Propriété

ABC est un triangle tel que $a = BC$; $b = AC$ et $c = AB$. Soient S et p laire et le périmètre respectives du triangle ABC $(p = a+b+c)$, R et r sont les rayons respectives du cercle circoscrit au triangle ABC et du cercle inscrit dans le triangle ABC. On a :

- $\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{b}{\sin\hat{B}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$
- $abc = 4RS$
- $S = \frac{1}{2}ab\sin\hat{C} = \frac{1}{2}ac\sin\hat{B} = \frac{1}{2}bc\sin\hat{A}$
- $S = \frac{1}{2}pr$

