ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage Juillet 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Nombres complexes** ..... **3.5 points**
- Exercice 2 : **Structures algébriques** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Probabilité** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3,5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère l'application r qui associe un point $M(z)$ à un point $M_1(z_1)$ tel que :

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i}{2}$$

Et l'application h qui associe le point $M(z)$ à un point $M_2(z_2)$ tel que : $z_2 = -2z + 3i$

On pose : $F = h \circ r$

1 pt **1 -** Déterminer la nature de chacune des deux applications r et h et leurs éléments caractéristiques.

2 - On considère les deux points $\Omega(i)$ et $A(a)$ avec a un nombre complexe donné différent de i.

On pose : $B = F(A)$, $C = F(B)$ et $D = F(C)$

0.5 pt **a)** Montrer que si le point $M'(z')$ est l'image du point $M(z)$ par l'application F alors :

$$z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z-i)$$

0.25 pt **b)** Vérifier que Ω est l'unique point qui vérifie : $F(\Omega) = \Omega$

0.75 pt **3 - a)** Déterminer en fonction du nombre complexe a les complexes b , c et d les affixes respectives de B , C et D.

0.25 pt **b)** Montrer que les points Ω et A et D sont alignés.

0.5 pt **c)** Montrer que Ω est le barycentre du système pondéré $\{(B,4);(C,2);(D,1)\}$.

0.25 pt **d)** Déterminer l'ensemble des points $A(a)$ pour que le point D appartient à l'axe réel.

Exercice 2 : (4 points)

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \ ; \ x * y = x + y - 3xy$$

0.25 pt **1 - a)** Vérifier que : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \ ; \ (1-3x)(1-3y) = 1 - 3(x*y)$

0.75 pt **b)** Montrer que $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; *\right)$ est un groupe commutatif.

0.5 pt **2 - a)** Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} \phi : & \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; *\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\star; \times) \\ & x & \longmapsto & 1-3x \end{array}$ est un isomorphisme.

0.25 pt **b)** Montrer que : $\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right) = \left]-\infty; \frac{1}{3}\right[$

0.5 pt **c)** Montrer que $\left(\left]-\infty; \frac{1}{3}\right[; *\right)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}; *\right)$.

Yassine Elamri

3 - Pour chaque x de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$x^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad (\forall n \in \mathbb{N})\ x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

0.25 pt **a)** Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right); (\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ \phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n$

0.5 pt **b)** En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et n.

4 - On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $\top$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right)\ ;\ x \top y = x + y - \frac{1}{3}$$

0.5 pt **a)** Montrer que $(\mathbb{R}; \top)$ est un groupe abélien.

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\mathbb{R}; \top; *)$ est un corps commutatif.

Exercice 3 : (2.5 points)

Un urne contient quatre boules : une boule blanche, trois boules rouges indiscernables au toucher.
On tire aléatoirement une boule de l'urne, on note sa couleur puis on la remet à l'urne.
On répète la même expérience plusieurs fois jusqu'à obtenir pour la première fois
deux boules successives de même couleur et on arrête l'expérience.
Soit X la variable aléatoire qui vaut le rang du tirage où on a arrêté l'expérience.

1 pt **1 -** Calculer la probabilité des deux événements suivants : $[X = 2]$ et $[X = 3]$.

2 - Soit k un entier naturel non nul.

0.75 pt **a)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k]$ est : $P_{2k} = \frac{5}{8}\left(\frac{3}{16}\right)^{k-1}$

0.75 pt **b)** Montrer que la probabilité de l'événement $[X = 2k+1]$ est : $P_{2k+1} = \left(\frac{3}{16}\right)^{k}$

Exercice 4 : (10 points)

Partie I:

On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I = \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}\ ;\ x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.5 pt **1 -** Montrer que la fonction f est continue en 0.

2 - Pour tout réel non nul a de l'intervalle I, on considère la fonction numérique h_a de variable réelle x définie sur l'intervalle I par :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)\, x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)\, a^2$$

Yassine Flamri

a) Calculer $h_a(a)$ et $h_a(0)$ puis en déduire qu'il existe un réelle b compris entre 0 et a tel que : **0.5 pt**

$$\frac{\ln(1+2a)-2a}{a^2}=\frac{-2}{1+2b}$$

b) En déduire que la fonction f est dérivable en 0 et que : $f'(0)=-2$ **0.75 pt**

3 - a) Montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $I\setminus\{0\}$ et que : **0.5 pt**

$$(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ \ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2(1+2x)}\ \text{ avec }\ g(x)=2x-(1+2x)\ln(1+2x)$$

b) Montrer que : $(\forall x\in I\setminus\{0\})\ ;\ \ g(x)<0$ **0.5 pt**

c) En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle I. **0.25 pt**

4 - a) Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\longrightarrow-\frac{1}{2}^+}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ puis interpréter les deux résultats obtenus géométriquement. **0.5 pt**

b) Montrer qu'il existe un unique réel α de l'intervalle $[1;2]$ tel que : $f(\alpha)=1$ **0.5 pt**

c) Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha\approx 1,3$) **0.5 pt**

Partie II:

1 - On considère la fonction ϕ définie sur l'intervalle I par : $\phi(x)=\ln(1+2x)$ et on pose $J=[1;\alpha]$

a) Montrer que la fonction ϕ est dérivable sur l'intervalle I et que : **0.5 pt**

$$(\forall x\geqslant 1)\ ;\ \ 0<\phi'(x)\leqslant\frac{2}{3}$$

b) Vérifier que : $\phi(\alpha)=\alpha$ et que : $\phi(J)\subset J$ **0.75 pt**

2 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0=1\ \texttt{et}\ \ (\forall n\in\mathbb{N})\ \ u_{n+1}=\ln(1+2u_n)$$

a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \ u_n\in J$ **0.5 pt**

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \ |u_n-\alpha|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n$ **0.5 pt**

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. **0.5 pt**

Partie III:

On considère la fonction numérique F définies sur l'intervalle I par :

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1 - a) Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle I puis calculer $F'(x)$ **0.5 pt**

b) En déduire le sens des variations de la fonction F sur l'intervalle I. **0.25 pt**

2 - a) Montrer que : $(\forall x\geqslant 1)\ ;\ \ F(x)\geqslant\int_1^x\frac{\ln(1+2t)}{1+2t}\,\mathrm{d}t$ **0.5 pt**

Yassine Elamri

0.5 pt **b)** En déduire que : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} F(x) = +\infty$

3 - On suppose que la fonction F admet une limite finie l à droite en $-\frac{1}{2}$.

On considère la fonction $\tilde{F}$ définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} \tilde{F}(x) = F(x)\ ; \quad x \in I \\ \tilde{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = l \end{cases}$$

0.5 pt **a)** En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$(\forall x \in I)\ ;\quad F(x) - l \geqslant f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

0.5 pt **b)** En déduire que la fonction $\tilde{F}$ n'est pas dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$.

FIN

Yassine Elamri