ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal Juin 2008

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3.25 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **3.75 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3,25 points)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & \sqrt{3}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0\end{pmatrix}$ et $E=\left\{M(a,b)=\begin{pmatrix}a & \sqrt{3}b\\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & a\end{pmatrix} / a,b\in\mathbb{R}\right\}$

0.75 pt **1 - a)** Montrer que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

0.5 pt **b)** Montrer que la famille (I,J) est une base dans l'espace vectoriel $(E,+,\cdot)$.

2 - On considère l'application $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C}^* & \longrightarrow & E^* \\ & a+ib & \longmapsto & M(a;b)\end{array}$ où : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$

0.25 pt **a)** Montrer que E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0.5 pt **b)** Montrer que f est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

0.5 pt **3 -** Montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

0.75 pt **4 -** Résoudre dans E l'équation : $J\times X^3=I$ (où $X^3=X\times X\times X$)

Exercice 2 : (3,75 points)

Soit a un nombre complexe non nul et $\overline{a}$ le conjugué du nombre a.

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(G): iz^2+(a+\overline{a}-i)z-\overline{a}-ia\overline{a}=0$

0.5 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (G) est : $\Delta=(a-\overline{a}-i)^2$

0.5 pt **b)** Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation (G).

0.5 pt **2 -** Montrer que a est une solution de l'équation (G) si, et seulement si : $Re(a)=Im(a)$
(où $Re(a)$ est la partie réel du complexe a et $Im(a)$ est la partie imaginaire du complexe a)

Partie II:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$et on suppose que $Re(a)\neq Im(a)$.

On considère les points A , B et C d'affixes respectives : a , $i\overline{a}$ et $1+ia$.

1 - On pose : $Z=\dfrac{(1+ia)-a}{i\overline{a}-a}$

0.5 pt **a)** Vérifier que : $\overline{Z}=\dfrac{(i-1)\overline{a}-i}{i\overline{a}-a}$

0.5 pt **b)** Montrer que les points A , B et C sont alignés si, et seulement si : $Im(a)=\dfrac{1}{2}$

2 - On suppose dans cette question que $Im(a)\neq\dfrac{1}{2}$

On considère R_1 la rotation de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et R_2 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. On pose : $R_1(B)=B'$ et $R_2(C)=C'$.

Soit E le milieu du segment $[BC]$.

0.5 pt **a)** Déterminer b' et c' les affixes respectives de B' et C'.

0.75 pt **b)** Montrer que les droites (AE) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que : $B'C'=2AE$

Today better than y y, tomorrow better than today

Yassine Elamri

Exercice 3 : (3 points)

Partie I:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ l'équation suivante : $(E) : 35u - 96v = 1$

0.25 pt **1 -** Vérifier que le couple $(11, 4)$ est une solution particulière de l'équation (E).

0.5 pt **2 -** En déduire l'ensemble de solutions de l'équation (E).

Partie II:

On considère dans l'ensemble $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $(F) : x^{35} \equiv 2\ [97]$

1 - Soit x une solution de l'équation (F).

0.5 pt **a)** Montrer que 97 est premier et que x et 97 sont premiers entre eux.

0.5 pt **b)** Montrer que : $x^{96} \equiv 1\ [97]$

0.5 pt **c)** Montrer que : $x \equiv 2^{11}\ [97]$

0.25 pt **2 -** Montrer que si l'entier naturel x vérifie $x \equiv 2^{11}\ [97]$, alors x est solution de l'équation (F).

0.5 pt **3 -** Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (F) est l'ensemble des entiers naturels qui s'écrivent sous la forme : $11 + 97k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : (10 points)

Partie I:

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = 2x - e^{-x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

0.5 pt **1 - a)** Calculer la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 2x)$ puis interpréter le résultat obtenu géométriquement.

0.5 pt **b)** Calculer $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}_+$ puis dresser le tableau des variations de f.

0.5 pt **c)** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}_+$ et que $0 < \alpha < 1$.

0.5 pt **d)** Étudier le signe de $f(x)$ dans l'intervalle $[0; 1]$.

0.5 pt **2 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 0,4$)

Partie II:

On considère les deux fonctions ϕ et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$g(x) = x^2 - \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad \begin{cases} \phi(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\ ; & x > 0 \\ \phi(0) = 1 \end{cases}$$

0.5 pt **1 - a)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ (\exists c \in]0; x[)\ ;\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt = e^{-c^2}$

0.5 pt **b)** En déduire que : $\displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,dt < 1$

0.5 pt **2 - a)** Montrer que : $g(\alpha) = \displaystyle\int_0^\alpha f(t)\,dt$

0.5 pt **b)** Montrer que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+)\ ;\ g'(x) = f(x)$

Today better than y y, tomorrow better than today

Yassine Elamri

0.5 pt **c)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans l'intervalle $]\alpha; 1[$.

0.5 pt **3 - a)** Montrer que la fonction ϕ est continue à droite en 0.

0.5 pt **b)** En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \phi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

0.75 pt **c)** Montrer que la fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \phi'(x) = -\frac{2}{x^2}\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

0.5 pt **d)** Montrer que : $\phi([0;1]) \subset [0;1]$

0.5 pt **4 - a)** Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}_+$ on a : $\displaystyle\int_0^x t^2 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x^3}{3}$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall x \in]0;1[) \ ; \ \ |\phi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{3}$

0.25 pt **c)** Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \ ; \ \ \phi(x) = x \iff g(x) = 0$

5 - On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{2}{3} \ \texttt{et} \ \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_{n+1} = \phi(u_n)$$

0.5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

0.5 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \ |u_n - \beta| \leqslant \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

0.5 pt **c)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

FIN

Yassine Elamri

Today better than y y, tomorrow better than today