ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juillet 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Analyse** ..... **10 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire non commutatif et non intègre dont le zéro est la matrice nulle 0 et dont l'unité est la matrice identique I_2 et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; .)$ est un espace vectoriel réel.

On pose pour tous réels a et b : $M_{(a;b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$, et soit $V = \{M_{(a;b)} \ / \ (a;b) \in \mathbb{R}^2\}$

0,75 pt **1 -** Montrer que V est un sous-espace vectoriel réel de l'espace vectoriel réel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; .)$ et déterminer une base de V.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que l'ensemble V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$

0,5 pt **b)** Montrer que $(V; +; \times)$ est un anneau commutatif unitaire.

0,25 pt **3 - a)** Calculer $M_{\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)} \times M_{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)}$.

0,25 pt **b)** L'anneau $(V; +; \times)$ est-il un corps ?

4 - Soit X une matrice de l'ensemble V telle que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ avec $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

0,5 pt **a)** Montrer que $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I_2 = 0$

b) On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$

0,5 pt Montrer que la matrice X admet un inverse dans V qu'on déterminera.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit u un nombre complexe différent de $(1 - i)$.

0,25 pt **1 - a)** Développer $(iu - 1 - i)^2$.

0,75 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :(E) : $z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0$

2 - Le plan complexe $(\mathcal{P})$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Soient les points $A\,((1 + i)u - 2i)$, $B\,((1 - i)u + 2)$, $U(u)$ et $\Omega(2 - 2i)$

0,5 pt **a)** Déterminer l'affixe du point I le milieu du segment $[AB]$, puis déterminer le vecteur de la translation t qui transforme U au point I.

0,5 pt **b)** Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrer que $R(A) = B$.

0,5 pt **c)** En déduire que les droite (ΩI) et (AB) sont perpendiculaires.

0,75 pt **d)** A partir du point U , expliquer une méthode de construction des points A et B.

3 - On pose $u = (1 + i)a - 2i$ tel que : $a \in \mathbb{R}$

0,5 pt **a)** Déterminer les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AU}$ en fonction de a.

0,25 pt **b)** En déduire que les points A , B et U sont alignés.

Yassine Elamri

Exercice 3 : (3 pts)

n un entier naturel supérieur ou égal à 4.

On a trois urnes U_1, U_2 et U_3 L'urne U_1 contient n boules indiscernables au toucher : une boule rouge et $(n-1)$ boules noires.

L'urne U_2 contient n boules indiscernables au toucher : deux boules rouges et $(n-2)$ boules noires.

L'urne U_3 contient n boules indiscernables au toucher : trois boules rouges et $(n-3)$ boules noires.

On considère l'expérience aléatoire suivante :

On choisit aléatoirement une urne parmi les trois urnes précédentes, puis on en tire simultanément deux boules.

Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées.

0,25 pt **1 -** Déterminer les valeurs possibles de la variable aléatoire X.

0,75 pt **2 - a)** Montrer que $P[X=2] = \dfrac{8}{3n(n-1)}$

0,75 pt **b)** Montrer que $P[X=1] = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

0,5 pt **c)** En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

0,75 pt **3 -** Sachant que les deux boules tirées sont rouges , quelle est la probabilité pour qu'elles proviennent de l'urne U_3 ?

Exercice 4 : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(x) = 2(1-e^{-x}) - x$

0,5 pt **1 - a)** Étudier les variations de la fonction g

0,5 pt **b)** Dresser le tableau de variations de la fonction g.

0,5 pt **2 - a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α de l'intervalle $]\ln(4);\ln(6)[$. (On prend $\ln(4) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$)

0,5 pt **b)** Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

3 - On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $\begin{cases} U_{n+1} &= 2\left(1-e^{-U_n}\right) \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}) \\ U_0 &= 1 \end{cases}$

0,5 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 \leqslant U_n \leqslant \alpha$.

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ U_{n+1} - U_n = g(U_n)$.

0,25 pt **c)** Montrer que la suite numérique $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est strictement croissante.

0,5 pt **d)** Montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Yassine Elamri

Partie II :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f(x) = \dfrac{1-e^x}{x^2}$

et soit $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1 pt **1 -** Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

0,5 pt **2 - a)** Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}$.

0,75 pt **b)** Montrer que : $f'(x) = \frac{g(x)e^{-x}}{x^3}$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

0.5 pt **3 -** Tracer la courbe $(\mathcal{C}_f)$. (On prend $\alpha \approx 1,5$)

Partie III :

On considère la fonction F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}dt \ ; \quad (\forall x > 0) \\ F(0) = -\ln(2) \end{cases}$$

0,5 pt **1 - a)** En utilisant une intégration par parties , montrer que :

$$(\forall x > 0) \quad F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$$

0,5 pt **b)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $\quad e^x \ln(2) \leqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt \leqslant e^{2x}\ln(2)$

0,5 pt **c)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}dt$ puis en déduire que F est continue à droite au point 0.

0,25 pt **2 - a)** Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $\quad F(x) \leqslant \dfrac{1-e^x}{2x}$

0,25 pt **b)** Calculer la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

0,5 pt **3 -** Montrer que la fonction F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que :

$$(\forall x > 0) \ ; \ F'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^2$$

4 - a) Soit x un réel de l'intervalle $]0;+\infty[$

0,75 pt Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0;x[$ tel que : $F(x) - F(0) = -\dfrac{1}{2}xe^{2c}$

(Utiliser le théorème des accroissements finis deux fois)

0,25 pt **b)** Démontrer que pour tout x de l'intervalle $]0;+\infty[$: $\quad -\dfrac{1}{2}e^{2x} \leqslant \dfrac{F(x)-F(0)}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}$

0,25 pt **c)** En déduire que la fonction F est dérivable à droite au point 0 et que : $F'_d(0) = -\dfrac{1}{2}$

FIN

Yassine Elamri