ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Normal juin 2009

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Arithmétiques** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Analyse** ..... **10 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2.

On rappelle que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire dont l'élément neutre est $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices carrées $M(x;y)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

$$M(x;y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (x;y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$$

0,25 pt **1 - a)** Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \times)$.

0,5 pt **b)** Montrer que $(\mathcal{F}; \times)$ est un groupe non commutatif.

2 - Soit G l'ensemble des matrices $M(x;0)$ de $\mathcal{F}$ avec $x \in \mathbb{R}^*$.

1 pt Montrer que l'ensemble G est un sous-groupe du groupe $(\mathcal{F}; \times)$.

3 - On pose $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$. On munit l'ensemble E de la loi de composition interne $\perp$ définie par :

$$(\forall (x;y) \in E)(\forall (a;b) \in E) \; ; \quad (x;y) \perp (a;b) = (ax; bx + \frac{y}{a})$$

et on considère l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi : & (\mathcal{F}; \times) & \longrightarrow & (E; \perp) \\ & M(x,y) & \longmapsto & \phi(M(x;y)) = (x,y) \end{array}$$

0,25 pt **a)** Calculer $(1;1) \perp (2;3)$ et $(2;3) \perp (1;1)$.

0,5 pt **b)** Montrer que ϕ est un isomorphisme.

0,5 pt **c)** En déduire la structure de $(E; \perp)$.

Exercice 2 : (4 pts)

Soit m un nombre complexe différent de 1.

I) On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$(E) \; : \; z^2 - (1-i)(m+1)z - i(m^2+1) = 0$$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est : $\Delta = [(1+i)(m-1)]^2$

0,25 pt **b)** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0,5 pt **c)** Déterminer sous forme algébrique les deux valeurs du complexe m pour afin que le produit des deux solutions de l'équation (E) est égal à 1.

2 - On pose $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

1 pt Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique dans le cas où $m = e^{i\theta}$ avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

II) Le plan complexe $(\mathcal{P})$est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e_1}; \vec{e_2})$

On considère les points M , M_1 et M_2 d'affixes respectivement m ; $z_1 = 1 - im$ et $z_2 = m - i$

0,5 pt **1 -** Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points M , M_1 et M_2 soient alignés.

Today better than y y, tomorrow better than today

Yassine Elamri

0,5 pt **a)** Montrer que la transformation R reliant chaque point M d'affixe z au point M' d'affixe $z' = 1 - iz$ est une rotation dont on déterminera l'affixe du centre Ω et une mesure de son angle.

0,5 pt **b)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ est un imaginaire pure si et seulement si $\Re e(m) + \Im m(z) = 1$.

0,5 pt **c)** En déduire l'ensemble des points M tel que les points Ω , M , M_1 et M_2 soient cocycliques.

Exercice 3 : (3 pts)

Pour tout n entier naturel non nul ,on pose : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

0,25 pt **1 - a)** Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, a_n est pair.

0,5 pt **b)** Déterminer les valeurs de n pour lesquelles : $a_n \equiv 0\ [3]$

2 - Soit p un entier premier tel que : $p > 3$

0,75 pt **a)** Montrer que : $2^{p-1} \equiv 1\ [p]$, $3^{p-1} \equiv 1\ [p]$ et $6^{p-1} \equiv 1\ [p]$

0,75 pt **b)** Montrer que l'entier p divise a_{p-2}

0,75 pt **c)** Montrer que pour tout entier naturel q , il existe un entier naturel non nul n tel que :

$$a_n \wedge q = q$$

($a_n \wedge q$ désigne le plus grand commun diviseur de a_n et q)

Exercice 4 : (10 pts)

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = x(1 - \ln(x))^n \quad x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

Partie I :

Soit $(\mathcal{C}_n)$ la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité $2cm$)

0,5 pt **1 - a)** Montrer que la fonction f_n est continue à droite au point 0. (poser $x = t^n$)

0,25 pt **b)** Étudier la dérivabilité de la fonction f_n à droite au point 0.

1 pt **c)** Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_2(x)}{x}$

0,5 pt **2 - a)** Étudier les variations de la fonction f_1.

0,5 pt **b)** Étudier les variations de la fonction f_2.

0,25 pt **3 - a)** Étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

Today better than y y, tomorrow better than today

Yassine Elamri

0,5 pt **b)** Construire les courbes $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

(On admet que le point $A(1;1)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C}_2)$).

Partie II :

On considère la fonc $\int^1 f_1(t)$

0,5 pt **1 - a)** Montrer q

0,25 pt **b)** En déduir

0,25 pt **2 - a)** Montrer q

b) Vérifier q

0,25 pt l'intervall

0,25 pt **c)** Montrer q

3 - On suppose q

0,25 pt Montrer que

Partie III :

Pour tout entier nat

0,5 pt **1 - a)** Montrer q

0,5 pt **b)** Détermin

0,25 pt **c)** Montrer q

0,25 pt **d)** En déduir

0,5 pt **2 - a)** Montrer q

b) En déduir

0,5 pt droites d'

0,75 pt **3 - a)** Montrer q

0,5 pt **b)** Calculer l

4 - Soit a un no

htt

On considère la suite numérique $(V_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\begin{cases} V_1 = a \\ V_{n+1} = -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} V_n \ ; \quad (\forall n \geqslant 1) \end{cases}$

et pour tout entier naturel n non nul , on pose : $d_n = |V_n - U_n|$

0,25 pt **a)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 1) \ : \ d_n = \frac{n!}{2^{n-2}} d_1$

0,25 pt **b)** Montrer que : $(\forall n \geqslant 2) \ : \ \frac{n!}{2} \geqslant 3^{n-2}$

0,25 pt **c)** Montrer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

0,25 pt **d)** En déduire que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est divergente.

FIN

Today better than yesterday, tomorrow better than today