ROYAUME DU MAROC

Baccalauréat Sciences Mathématiques

Session : Rattrapage juin 2010

MATHÉMATIQUES

Série : **Sciences Mathématiques A et B**

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

INSTRUCTIONS GENERALES

✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée ;

✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient ;

✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter ;

COMPOSANTES DU SUJET

Ce sujet comporte 4 exercices :

- Exercice 1 : **Structures algébriques** ..... **3 points**
- Exercice 2 : **Nombres complexes** ..... **4 points**
- Exercice 3 : **Calcul des probabilités** ..... **3 points**
- Exercice 4 : **Problème d'analyse** ..... **10 points**

Yassine Elamri

Exercice 1 : (3 pts)

On rappelle que $\left(M_3(\mathbb{R}),+,\times\right)$ est un anneau unitaire non commutatif.

On considère l'ensemble $E=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}1&0&0\\x&1&0\\x^2&2x&1\end{pmatrix}/\,x\in\mathbb{R}\right\}$

0,5 pt **1 -** Montrer que E est une partie stable de $\left(M_3(\mathbb{R}),\times\right)$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que l'application φ qui à tout nombre réel x associe la matrice $M(x)$ est un isomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\times)$.

0,5 pt **b)** En déduire que $(E,\times)$ est un groupe commutatif.

0,5 pt **c)** Pour x un réel, déterminer $M^{-1}(x)$ l'inverse de la matrice $M(x)$

0,5 pt **d)** Résoudre dans l'ensemble E l'équation $A^5X=B$ où $A=M(2)$ et $B=M(12)$ et $A^5=\underbrace{A\times\cdots\times A}_{5\text{ fois}}$

0,5 pt **3 -** Montrer que l'ensemble $F=\left\{M\Big(\ln(x)\Big)/x\in\mathbb{R}_+^*\right\}$ est un sous-groupe de $(E,\times)$

Exercice 2 : (4 pts)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

1 - On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $(E)\ \ z^2-4iz-2+2i\sqrt{3}=0$

0,5 pt **a)** Vérifier que le nombre $a=1+i(2-\sqrt{3})$ est une solution de l'équation (E)

0,5 pt **b)** En déduire b la deuxième solution de l'équation (E)

0,5 pt **2 - a)** Montrer que : $a^2=4(2-\sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$

0,75 pt **b)** Ecrire a sous forme trigonométrique

3 - On considère les points A , B et C dont les affixes sont respectivement a, b et $c=2i+2e^{i\frac{\pi}{7}}$

Soit (Γ) le cercle de diamètre $[AB]$

0,5 pt **a)** Déterminer ω, l'affixe du point Ω centre du cercle (Γ)

0,5 pt **b)** Montrer que les points O et C appartiennent au cercle (Γ)

0,75 pt **c)** Montrer que le nombre complexe $\dfrac{c-a}{c-b}$ est imaginaire pur.

Exercice 3 : (3 pts)

Une urne contient 10 boules blanches et deux boules rouges.

On extrait les boules de l'urne l'une après l'autre et sans remise jusqu'à l'obtention pour la première fois d'une boule blanche, puis on arrête lexpérience.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boule tirée .

0,25 pt **1 - a)** Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X

0,5 pt **b)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=1]$

Today better than yesterday, tomorrow better than today https://steinmath.com
Yassine Elamri

0,5 pt **c)** Montrer que : $p[X=2]=\dfrac{5}{33}$

0,5 pt **d)** Calculer la probabilité de l'événement $[X=3]$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(x)=\dfrac{13}{11}$

0,75 pt **b)** Calculer $E(X^2)$, et en déduire la valeur de la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X.

Exercice 4 : (10 pts)

partie A : On considère la fonction numérique f définie sur l'intervalle $I=[0;1]$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{1-\ln(1-x)} & ;\ 0\le x<1 \\ f(1)=0 \end{cases}$$

Soit (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,5 pt **1 -** Montrer que f est continue à gauche au point 1.

0,5 pt **2 -** Etudier la dérivabilité de f à gauche au point 1.

0,75 pt **3 -** Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I puis donner son tableau de variations.

0,5 pt **4 - a)** Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion unique d'abscisse $\dfrac{e-1}{e}$

0,75 pt **b)** Construire la courbe (C) en précisant sa demi-tangente au point d'abscisse 0.
(on prendra $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=2cm$)

0,5 pt **5 -** Montrer qu'il existe un nombre réel unique α de l'intervalle I vérifiant : $f(\alpha)=\alpha$

0,25 pt **6 - a)** Montrer que f est une bijection de l'intervalle I vers I

0,5 pt **b)** Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout x de l'intervalle I.

partie B : On pose $I_0=\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, et pour tout entier naturel n non nul $I_n=\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$

0,75 pt **1 - a)** Montrer que la suite $(I_n)_{n\ge0}$ est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

0,75 pt **b)** Montrer que : $(\forall n\ge0)\ ;\ 0\le I_n\le\dfrac{1}{n+1}$, puis déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\ge0}$

partie C : Pour tout nombre réel x de l'intervalle $J=[0;1[$ et pour tout entier naturel n non nul on pose : $F_0(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ et $F_n(x)=\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$ et $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$ et $S_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}F_k(x)$

1 pt **1 -** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall x\in J)$: $F(x)-S_n(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{t^{n+1}f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$

0,5 pt **2 - a)** Montrer que la fonction $x\mapsto(1-x)\big(1-\ln(1-x)\big)$ est strictement décroissante sur J

0,5 pt **b)** Montrer que la fonction $t\mapsto\dfrac{f(t)}{1-t}$ est strictement croissante sur $[0;x]$ pour $x\in J$

1 pt **3 - a)** Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})\ (\forall x\in J)$: $0\le F(x)-S_n(x)\le\dfrac{1}{n+2}\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

0,5 pt **b)** En déduire que pour tout x de l'intervalle J on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=F(x)$

0,5 pt **4 - a)** Déterminer $F(x)$ pour $x\in J$

0,25 pt **b)** Déterminer la limite : $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)$

FIN

Today better than yesterday, tomorrow better than today https://steinmath.com
Yassine Elamri